

Questions de cours :

Soit (E, d) , (E', d') deux espaces métriques et A une partie de E . Rappeler les définitions :

- 1) d'un point adhérent à A .
- 2) d'une suite convergente dans (E, d) .
- 3) d'une fonction Lipschitzienne de (E, d) dans (E', d') .

Exercice 1

Soit $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ une fonction continue. On munit \mathbb{R}^2 de la distance $d_1((x_1, y_1); (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

- 1) Montrer que la partie

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, y \leq f(x)\}$$

est un fermé de (\mathbb{R}^2, d_1) .

- 2) Déterminer l'intérieur de A .
- 3) Quelle est la frontière de A .

Exercice 2

Soit (E, d) un espace métrique et A, B deux parties fermées de (E, d) .

- 1) Prouver que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est Lipschitzienne.
- 2) Démontrer que $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in A$.
- 3) En déduire que si $d(x, A) = d(x, B)$ pour tout $x \in E$ alors $A = B$.