

Question de cours :

- 1) Rappeler la définition d'une distance.
- 2) Donner un exemple d'une norme sur \mathbb{R}^2 .
- 3) Rappeler la définition d'un ouvert d'un espace métrique.

Exercice 1

Soit E un ensemble et d_1, d_2 deux distances sur E .

- 1) Montrer que $d = d_1 + d_2$ et $d' = \max(d_1, d_2)$ sont des distances sur E .
- 2) Prouver que pour tout $x, y \in E$

$$d'(x, y) \leq d(x, y) \leq 2d'(x, y).$$

- 3) En déduire que tout ouvert de (E, d) est un ouvert de (E, d') . Puis montrer que (E, d) et (E, d') ont la même topologie.

Exercice 2

Soit (E, d) un espace métrique et x un point de E . Pour $0 < r_1 < r_2$, on pose

$$\mathcal{O} = \{y \in E, r_1 < d(x, y) < r_2\}$$

- 1) Exprimer \mathcal{O} à l'aide des boules.
- 2) En déduire que \mathcal{O} est un ouvert de (E, d) .