Feuille d'exercices

Exercice. 1.
1) Montrer qu'une forme linéaire f sur un espace normé E est continue si et seulement si $Ker(f)$ est un fermé de E.
2) Soient f, g deux forme linéaires bornées sur un espace normé. Montrer que si $Ker(f) = Ker(g)$ alors $f = \lambda g$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exercice. 2.
Montrer que $L^2(\mathbb{R}, dx)$ est un espace de Hilbert séparable.

Exercice. 3.
Trouver un espace mesuré (M, τ, μ) tel que l'espace $L^2(M, \mu)$ n'est pas séparable.

Exercice. 4.
Montrer que $L^\infty(\mathbb{R}, dx)$ est un espace de Banach.

Exercice. 5.
Soient $\ell^\infty(\mathbb{N})$ l'espace de Banach des suites réelles bornées et $\ell^1(\mathbb{N})$ l'espace de Banach des suites réelles absolument sommables. Montrer que $\ell^1(\mathbb{N})^* = \ell^\infty(\mathbb{N})$ mais que $\ell^1(\mathbb{N}) \neq \ell^\infty(\mathbb{N})^*$.

Exercice. 6.
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Montrer que si $A_n \xrightarrow{s} A$ et $B_n \xrightarrow{s} B$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ alors $A_n B_n \xrightarrow{s} AB$. Trouver un exemple tel que $A_n \xrightarrow{w} A$ et $B_n \xrightarrow{w} B$ mais $A_n B_n \overset{w}{\nrightarrow} AB$.

Exercice. 7.
Soit $(A_n)_n$ une suite d'opérateurs positifs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Montrer que si A_n converge en norme vers $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ alors $\sqrt{A_n}$ converge en norme vers $\sqrt{A}$.

Exercice. 8.
Prouver que si $(A_n)_n$ est une suite de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ qui converge en norme vers $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ alors $(|A_n|)_n$ converge en norme vers $|A|$.

Exercice. 9.
Montrer que si $A_n \xrightarrow{s} A$ et $A_n^* \xrightarrow{s} A^*$ alors $|A_n| \xrightarrow{s} |A|$.

Exercice. 10.
Soit $k(.,.)$ une fonction continue sur $[a, b] \times [a, b]$. On définit

$$(Tf)(x) = \int_a^b k(x, y)\, f(y)\, dy.$$

Montrer que T est un opérateur borné sur l'espace de Banach $C([a, b], \mathbb{C})$ et qu'il est limite en norme d'une suite d'opérateurs de rang fini.

Exercice. 11.
Soit (M, μ) un espace mesuré et $k \in L^2(M \times M, \mu \otimes \mu)$. Montrer que

$$(Tf)(x) = \int_{M^2} k(x, y)\, f(y)\, \mu(dy)$$

est un opérateur Hilbert-Schmidt.

Exercice. 12.
(i) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ on a $||A|| \leq ||A||_2 \leq ||A||_1$.
(ii) Prouver pour tout $A \in \mathcal{L}(H)$ et $B \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ que

$$||AB||_1 \leq ||A|| \, ||B||_1 \quad \text{et} \quad ||BA||_1 \leq ||A|| \, ||B||_1.$$

Exercice. 13.
Monter que pour tout $A, B \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$

$$||AB||_1 \leq ||A||_2 \, ||B||_2 \qquad \text{(l'inégalité de Hölder)} .$$

Exercice. 14.
Soient P, Q deux projections orthogonales respectivement sur les sous-espaces M et N. Monter que la suite $(PQ)^n$ converge fortement vers la projection orthogonale sur $M \cap N$.

Exercice. 15.
Montrer que pour $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, si $A \geq 0$ alors $(A - \lambda)^{-1}$ existe pour tout $\lambda < 0$.

Exercice. 16.
Soit A un opérateur auto-adjoint (non-borné) sur $\mathcal{H}$. Montrer que $\lambda \in \sigma(A)$ si et seulement pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\mathbb{1}_{[\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]}(A) \neq 0$.

Exercice. 17.
Pour $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ la décomposition polaire s'écrit $A = U|A|$. Soit f_n une suite de fonctions sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f_n(x) = \frac{1}{x}$ si $x \geq n$ et $f_n(x) = \frac{1}{n}$ si $0 \leq x \leq n$. Montrer que

$$Af_n(|A|) \xrightarrow{s} U .$$

Exercice. 18.
Montrer que $P = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$ avec $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et

$$D(P) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) : Pu \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$$

est un opérateur fermé à domaine dense.

Exercice. 19.
L'opérateur $T = -\frac{d^2}{dx^2}, D(T) = C_0^\infty(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R}, , dx)$ est-il essentiellement auto-adjoint?

Exercice. 20.
Soit $AC[0, 1]$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[0, 1]$ ayant une dérivée dans $L^2[0, 1]$. On considère $T = i\frac{d}{dx}$ comme opérateur sur $L^2[0, 1]$ ayant pour domaine

$$D(T) = \{\varphi \in AC[0, 1], \varphi(0) = 0\}.$$

(i) Montrer que T est un opérateur fermé à domaine dense.
(ii) Déterminer le spectre de T.