Question de Cours:

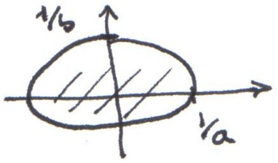
1) Voir Cours

2) $f : (X,d) \to (X',d')$ une fonction et $(X,d)$, $(X',d')$ deux espaces métriques.

$f$ est continue ssi Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ convergente vers $x$, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in X'^{\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

Ex 1:

1) $\overline{B}(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a^2x^2 + b^2y^2 \leq 1\}$




L'ellipse d'équation
$a^2x^2 + b^2y^2 = 1$
ainsi que l'intérieur.

2) oui :

$$N(x,y) = \sqrt{a^2x^2+b^2y^2} \leq \sqrt{\max(a^2,b^2)}\sqrt{(x^2+y^2)} = \max(a,b)\, N_2(x,y)$$

$$N_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{\frac{a^2}{\min(a^2,b^2)}x^2 + \frac{b^2}{\min(a^2,b^2)}y^2} = \frac{1}{\min(a,b)} N(x,y).$$

3)
$$\sup_{(x,y)\neq(0,0)} \frac{N(x,y)}{N_2(x,y)} = \max(a,b) \quad \left( \frac{N(0,1)}{N_2(0,1)} = b;\ \frac{N(1,0)}{N_2(1,0)} = a;\ + (2) \right)$$
et
$$\inf_{(x,y)\neq(0,0)} \frac{N(x,y)}{N_2(x,y)} = \min(a,b) \quad \left( \frac{N(x,y)}{N_2(x,y)} \geq \min(a,b) \text{ et } \frac{N(x,y)}{N_2(x,y)} \leq \max(a,b) \right)$$

4) $Id : (\mathbb{R}^2, N_2) \to (\mathbb{R}^2, N)$ est bijective entre deux espaces vectoriels normés de dimension finie, donc I est un homéomorphisme (i.e: bi continue). on peut aussi utiliser la question 2) pour montrer que $Id$ et $Id^{-1}$ sont deux applications linéaires continues.

EX2:

1) on montre que pour toute fonction continue $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\Gamma_g$ est un fermé.

En effet :

soit $(x_n, g(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma_g^{\mathbb{N}}$ une suite convergente, alors $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ et

$g(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. Comme $g$ est continue on a alors $g(x_n)\to g(x)$.

Donc $(x_n, g(x_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, g(x)) \in \Gamma_g$. Ceci montre que $\Gamma_g$ est fermé.

- si $g(x) = x$ on a alors $\Gamma_g = \{(x,y) ;\ y = x\} = \Delta$ fermé

si $g = f$ on a $\Gamma_g = \Gamma_f$ ; fermé.

2) on pose $h : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to x-y$. $h$ est continue car si $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$

est une suite convergente vers $(x,y)$ alors $h(x_n,y_n) = x_n - y_n \to \underset{\substack{\shortparallel \\ h(x,y)}}{x-y}$.

D'où : $\Delta_+ = h^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et $h^{-1}(\mathbb{R}_-^*) = \Delta_-$ sont deux ouverts de $\mathbb{R}^2$.

En particulier $\Delta_+ \cap \Delta_- = \emptyset$.

3) sinon $A = (A\cap\Delta_+) \cup (A\cap\Delta_-)$ avec

$A\cap\Delta_\pm$ deux ouverts disjoints de $A$ non-vide. Donc

$A$ n'est pas connexe, absurde.

4) Pour tout point $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$ de $\Gamma_f$ il existe un chemin continu $\gamma : [0,1] \to \Gamma_f$ reliant $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$ :

$\gamma(t) = (t x_1 + (1-t)x_0,\ f(tx_1 + (1-t)x_0))$ ; $\gamma(0) = (x_0, f(x_0))$ et $\gamma(1) = (x_1, f(x_1))$.

5) Si $\Gamma_f \cap \Delta_- = \emptyset$ alors $f(x) \geq x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ ; donc $f$ n'est pas bornée !

(de même pour $\Gamma_f \cap \Delta_+ \neq \emptyset$).

6) $\Gamma_f$ st convexe et $\Gamma_f \cap \Delta_+ \neq \phi$, $\Gamma_f \cap \Delta_- \neq \phi$ donc par la question 3) $\Gamma_f \cap \Delta \neq \phi$.

7) $\Gamma_f$ et $\Delta$ sont deux partis fermés donc $\Gamma_f \cap \Delta$ st fermé.

Il suffit de Montrer que $\Gamma_f \cap \Delta$ st borné pour conclure qu'il st compact. si $\Gamma_f \cap \Delta$ n'st pas borné alors il existerait une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ et tq $f(x_n) = x_n$, donc $f$ n'st pas borné. absurde!

Ex: 3

1) le sup st fini car $|P(x)| \leq C_p\, e^{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$ ($C_p$ = constante qui depend de $P$).

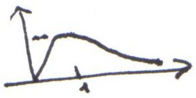
2) $T(\lambda P + Q)(x) = (\lambda P + Q)(x+1) = \lambda P(x+1) + Q(x+1)$
$= \lambda T(P)(x) + T(Q)(x)$

3) $\|TP\| = \sup\limits_{x \geq 0} e^{-x} |P(x+1)| = \frac{1}{e^{-1}} \sup\limits_{x \geq 0} e^{-(x+1)} |P(x+1)|$

$\|TP\| = \frac{1}{e^{-1}} \sup\limits_{y \geq 1} e^{-y} |P(y)| \leq e \sup\limits_{y \geq 0} e^{-y} |P(y)| = e . \|P\|$.

4) $\|TP\| \leq e \|P\|$, $\forall P \in E \Rightarrow \|T\| = \sup\limits_{P \neq 0} \frac{\|TP\|}{\|P\|} \leq e$.

5) $P(x) = x$; $\|P\| = \sup\limits_{x \geq 0} e^{-x} . x$



$f'(1) = 0$

car $f'(x) = (1-x) e^{-x} \Rightarrow \|P\| = 1/e$ $\quad f(x) = x e^{-x}$

$(TP)(x) = x+1$; $\|TP\| = \sup\limits_{x \geq 0} (1+x) e^{-x}$

$g(x) = (1+x) e^{-x} \Rightarrow g'(x) = -x e^{-x}$ ; $g'(0) = 0$ donc $\underline{\|TP\| = 1}$.

D'où $\frac{\|TP\|}{\|P\|} = e$.

6) $\|T\| = e$. car $\|T\| \leq e$ et $e = \frac{\|TP\|}{\|P\|} \leq \|T\|$ pour $P(x) = x$.

Ex 4 :

1) Voir Cours.

2) $|Tf(x)| \leq \frac{1}{4} |\cos(f^2(x))| + e^{-|x|}$

$\leq \frac{1}{4} + 1 = 5/4.$

3) $T(E) \subset B(0, 5/4)$ ; en particulier $T(B(0,5/4)) \subset B(0,5/4)$.

4) $|Tf(x) - Tg(x)| = \frac{1}{4} |\cos(f^2(x)) - \cos(g^2(x))|$ (ici : $|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x-y|$. )

$\leq \frac{1}{4} \sup_{y\in\mathbb{R}} |\sin(y)| . |f^2(x) - g^2(x)|$

$\leq \frac{1}{4} |f(x) - g(x)| (|f(x)| + |g(x)|)$

Donc : $\|Tf - Tg\| = \sup |Tf(x) - Tg(x)| \leq \frac{1}{4} \|f-g\| \; 2 \times \frac{5}{4}$

$= \frac{5}{8} \|f-g\|.$

(car $\|f\| \leq \frac{5}{4}$ et $\|g\| \leq 5/4$ ).

5) $T : B(0,5/4) \to B(0,5/4)$ est une application contractante sur un espace métrique complet, donc elle admet un unique point fixe (i.e : $T(F) = F$ ).

6) evident

7) $\tilde{F} = F$, car F est l'unique fonction dans $B(0,5/4)$ verifiant $(*)$.

8). $4(F(0) - 1) = \cos(F^2(0)) \geq -1 \Rightarrow F(0) \geq -1/4 + 1 = 3/4$.

9) $|F(x)|^2 \leq \left|\frac{5}{4}\right|^2 \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{4}\cos(F^2(x))}_{\geq 0} + \underbrace{e^{-|x|}}_{>0} > 0 \Rightarrow F(x) > 0.$