UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Topologie des espaces métriques

Examen finale : le 12/12/2011 (Durée : 2 heures)

Questions de cours :
1) Qu'est-ce qu'un espace métrique compact ?
2) Caractériser la continuité d'une fonction f entre deux espaces métriques à l'aide des suites.

Exercice 1

Soit $a, b > 0$. On pose pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$N(x, y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2} \quad \text{et} \quad N_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

On admet que N et N_2 définissent deux normes sur $\mathbb{R}^2$.
1. Dessiner la boule fermée de $(\mathbb{R}^2, N)$ de centre 0 et de rayon 1.
2. La norme N est-elle équivalente à la norme euclidienne N_2 ?
3. Déterminer

$$\inf_{(x,y)\neq(0,0)} \frac{N(x, y)}{N_2(x, y)} \quad \text{et} \quad \sup_{(x,y)\neq(0,0)} \frac{N(x, y)}{N_2(x, y)}\,.$$

4. Montrer que l'application linéaire Id : $(\mathbb{R}^2, N_2) \to (\mathbb{R}^2, N)$, définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \mathrm{Id}(x, y) = (x, y)\,,$$

est un homéomorphisme. Calculer sa norme $||\mathrm{Id}||$.

Exercice 2

Soit $E := \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. On définit pour $P \in E$:

$$\|P\| = \sup_{x\geq 0} e^{-x}|P(x)|.$$

On considère l'application $T : E \to E$, définie par

$$(TP)(X) = P(X + 1).$$

1. Montrer que $\| \cdot \|$ est bien définie et qu'elle est une norme sur E.
2. Vérifier que T est linéaire.
3. Montrer que
$$\|TP\| \leq e\|P\|, \quad \forall P \in E, \qquad \text{avec } \ e = e^1\,.$$
4. En déduire que T est continue et que
$$\|T\| \leq e.$$
5. Soit $P(X) = X$. Evaluer $\|P\|$ et $\|TP\|$.
6. En déduire la valeur de $\|T\|$.

T.S.V.P

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue <u>bornée</u>. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne on considère les parties

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}, \quad \Delta_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\} \quad \text{et} \quad \Delta_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}.$$

Soit $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ le graphe de la fonction f.

1. Prouver que Δ et Γ_f sont deux parties fermées de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que Δ_+ et Δ_- sont deux ouverts disjoints de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer qu'une partie connexe A de $\mathbb{R}^2$ qui rencontre Δ_+ et Δ_-, rencontre nécessairement Δ. (Indication : raisonner par l'absurde.)
4. Montrer que Γ_f est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
5. Prouver que $\Gamma_f \cap \Delta_+ \neq \varnothing$ et $\Gamma_f \cap \Delta_- \neq \varnothing$. En déduire que $\Gamma_f \cap \Delta \neq \varnothing$.
6. Montrer que $\Gamma_f \cap \Delta$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4

Soit $E := \mathcal{C}_b(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues bornées muni de la norme uniforme

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Soient $B(0, \frac{5}{4})$ la boule fermée de E de centre 0 et de rayon $\frac{5}{4}$ et T l'application de E dans E définie par : pour tout $f \in E$

$$(Tf)(x) = \frac{1}{4}\cos(f^2(x)) + e^{-|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Expliquer pourquoi $B(0, \frac{5}{4})$ est un espace métrique complet.
2. Montrer que pour tout $f \in E$ on a
$$||Tf|| \leq \frac{5}{4}.$$
3. En déduire que T envoie la boule $B(0, \frac{5}{4})$ sur elle-même (i.e. $T(B(0, \frac{5}{4})) \subset B(0, \frac{5}{4})$).
4. En utilisant l'inégalité des accroissement finis, montrer que
$$\forall f, g \in B(0, \frac{5}{4}), \quad \|Tf - Tg\| \leq \frac{5}{8}\|f - g\|.$$
5. En déduire que l'équation $Tf = f$ admet une unique solution dans la boule $B(0, \frac{5}{4})$, notée par F. Vérifier que
$$(\star) \quad F(x) = \frac{1}{4}\cos(F^2(x)) + e^{-|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
6. Soit $\tilde{F}(x) := F(-x)$. Vérifier que $\tilde{F} \in B(0, \frac{5}{4})$ et qu'elle est aussi solution de l'équation $(\star)$.
7. En déduire que F est paire.
8. Vérifier que $F(0) \geq \frac{3}{4}$.
9. En déduire que $F(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.