UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Equations différentielles

Examen Terminal (*Durée 2 heures*)

Questions de cours :(3pts)
1) Énoncer soigneusement le théorème de Cauchy-Lipschitz.
2) Rappeler la forme générale d'une équation différentielle de type Bernoulli.
3) Quand dit-on qu'un système différentiel linéaire est asymptotiquement stable ?

Exercice 1 : (4pts)
On considère l'équation différentielle :

$$(\star) \quad x^2(y' + y^2) = 2xy - 2.$$

1) Trouver une solution particulière de $(\star)$ sous la forme $y_0(x) = \frac{\alpha}{x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
2) Résoudre l'équation $(\star)$.
3) Déterminer la solution de $(\star)$ vérifiant $y(1) = 2$ et indiquer son domaine de définition.

Exercice 2 : (4pts)
On considère l'équation différentielle :

$$(\star\star) \;\; y'' - 2y' + y = e^t + 1$$

1) Résoudre l'équation homogène associée à $(\star\star)$.
2) Trouver une solution particulière de $(\star\star)$. Puis en déduire sa solution générale.
3) Résoudre l'équation $(\star\star)$ avec condition initiale $y(0) = 0, y'(0) = 0$, par la méthode de la transformée de Laplace.

Rappel :

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0), \qquad \mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad \mathcal{L}(\mathrm{e}^{at}f)(s) = \mathcal{L}(f)(s-a)$$

Exercice 3 : (5pts)
On considère le système différentiel

$$(\mathbf{E}) \;\; \frac{d}{dt}X(t) = AX(t) \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer les valeurs propres de A.
2) Calculer explicitement e^{tA}, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3) En déduire la solution du système $(\mathbf{E})$ vérifiant la condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4) Le système (**E**) est-il stable ?

Exercice 4 : (2pts)
On considère l'équation différentielle

$$(\star) \qquad y' = \cos^2(xy)\,.$$

1) A-t-on existence et unicité des solutions de l'équation $(\star)$ pour chaque condition initiale $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. (Justifiez votre réponse)
2) Montrer que toute solution de $(\star)$ est croissante.

Exercice 5 : (2pts)
Résoudre l'équation différentielle suivante

$$(x^2+1)y' + 2xy = 1$$