UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Equations différentielles

Examen finale (*Durée 2 heures*)

Exercice 1

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$\textbf{(a)}\quad -\frac{1}{2}xz'(x)+z(x)=x \qquad \textbf{(b)}\quad xy'(x)+y(x)=xy(x)^3.$$

1) Résoudre l'équation **(a)**.
2) Rappeler la forme générale d'une équation de Bernoulli.
3) En déduire la solution générale de **(b)** en utilisant le changement de fonction $z=\frac{1}{y^2}$.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(\star)\quad y''-2y'+y=e^t$$

1) Résoudre l'équation homogène associée à $(\star)$.
2) Trouver une solution particulière de $(\star)$. Puis en déduire la solution générale de $(\star)$.
3) En utilisant la transformation de Laplace, retrouver la solution de $(\star)$ de condition initiale $y(0)=1, y'(0)=0$.

Rappel :

$$L(f')=sL(f)-f(0), \qquad L(t^n)=\frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad L(\mathrm{e}^{at}f)=L(f)(s-a)$$

Exercice 3

On considère la matrice

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

1) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.
2) Calculer explicitement e^{tA}, pour $t\in\mathbb{R}$.
3) En déduire la solution du système différentiel suivant :

$$(\star)\quad \left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 2x(t)+y(t)\\ y'(t) & = & -x(t)\end{array}\right.$$

avec condition initiale $x(0)=y(0)=1$.
4) Déterminer la limite de $(x(t),y(t))$ quand t tend vers $+\infty$.
5) Le système linéaire $(\star)$ est-il stable ?
6) En déduire la solution du système d'équations différentielles :

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t)=2x(t)+y(t)+e^t\\ y'(t)=-x(t)-t\end{array}\right.$$

avec condition initiale $x(0)=y(0)=1$.

Exercice 4

On considère l'équation différentielle

$$(\star) \qquad y' = \arctan(xy)$$

1) Rappeler l'énoncé précis d'un des théorèmes de Cauchy-Lipschitz du cours.
2) Vérifier que on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz à $(\star)$ pour toute condition initiale $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
3) Soit $y_{max} : J \to \mathbb{R}$ la solution maximale de $(\star)$ de condition initiale (x_0, y_0).

a) Montrer que la dérivée $y'_{max}(x)$ est une fonction bornée sur J.

b) Montrer en utilisant **a)** que si J est un intervalle borné de $\mathbb{R}$ alors y_{max} est une fonction bornée sur J.

c) En déduire que la solution maximale y_{max} est définie sur tout $\mathbb{R}$.