UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Intégrale de fonctions de la variable réelle

Examen terminal (*Durée 2 heures*)

Question de cours :

1. Rappeler la définition d'une fonction Riemann intégrable sur un intervalle $[a, b]$.
2. Donner un exemple d'une fonction qui n'est pas Riemann intégrable sur $[0, 1]$.
3. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour des fonctions f, g continues sur $[a, b]$.
4. Préciser la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 1

1. Donner une primitive de la fonction $t \mapsto \ln(t)$ pour $t > 0$.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt$ est convergente. Puis, en déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$ l'est aussi.
3. En faisant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\,du = 0\,.$$

4. On considère pour tout $x > 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2}\,dt\,.$$

a) Montrer, par un changement de variable, que pour tout $x > 0$

$$F(x) = \frac{\pi}{2x}\ln(x)\,.$$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x > 0$

$$\frac{d^n}{dx^n}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{\ln(t)}{x^2+t^2}\right)dt\,.$$

c) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t^2)^2}\,dt\,.$$

Exercice 2

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)(t+1)}\,dt$.
2. Déterminer la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^2}{(n^2+k^2)(k+n)}\,.$$

Exercice 3

On considère l'intégrale dépendant d'un paramètre pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t+x)}{t}\, dt\,.$$

1. Montrer que $F(x)$ est une intégrale convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\, dt$ sont convergentes.
3. En utilisant les formules trigonométriques, montrer que F est de classe $C^\infty(\mathbb{R})$.
4. Calculer F'' et en déduire une équation différentielle vérifiée par F.

Exercice 4

Calculer les intégrales généralisées suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ **b)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} - \arctan(\frac{1}{x})\, dx\,.$