UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Topologie des espaces métriques

Examen du 17/12/2012 (Durée : 2 heures)

Questions de cours :
1) Rappeler la définition d'un point intérieur à une partie A d'un espace métrique (X, d).
2) Qu'est-ce qu'un homéomorphisme d'espaces métriques ?
3) Donner un exemple d'une partie compacte qui n'est pas connexe dans $(\mathbb{R}, |.|)$. Justifiez votre réponse.

Exercice 1

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles, muni de la norme uniforme

$$||f|| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \,, \quad \forall f \in E.$$

On considère l'application T de E dans E définie pour tout $f \in E$ par

$$T(f)(t) = \sin(\pi t) + \frac{1}{2}\int_0^t e^{(t-s)} f(s)ds \,, \quad \forall t \in [0,1] \,.$$

1. Montrer que pour tout $f, g \in E$

$$||T(f) - T(g)|| \leq C||f-g|| \quad \text{avec} \quad C = \frac{e-1}{2}$$

2. En déduire que T admet un unique point fixe qu'on notera par f_0.
3. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E définie par récurrence

$$g_{n+1}(t) = T(g_n)(t) \,, \quad g_0(t) = 1 \,, \quad \forall t \in [0,1]$$

a) Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$||g_k - g_{k+1}|| \leq C^k ||g_0 - g_1||$$

b) Prouver que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$

$$||g_m - g_n|| \leq \sum_{k=m}^{n-1} C^k ||g_0 - g_1||$$

c) En déduire que la suite g_n converge vers l'unique point fixe f_0.
4. Vérifier que si $f \in E$ est une fonction positive alors $T(f)$ est positive.
5. En déduire que toutes les fonctions g_n sont positives.
6. Montrer que g_n converge simplement vers f_0 (i.e. pour tout $t \in [0,1]$, $g_n(t)$ converge vers $f_0(t)$) .
7. En déduire que f_0 est positive.

T.S.V.P

Exercice 2

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions distinctes continues sur $\mathbb{R}$. On considère la partie

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$.
2. Prouver que si f, g sont deux polynômes alors $\mathcal{F}$ est un ensemble fini.
3. En déduire que $\mathcal{F}$ est compact.
4. On suppose que $f(x) = e^x$ et $g(x)$ est un polynôme.

a) Justifier que $\mathcal{F}$ est borné.

b) En déduire que $\mathcal{F}$ est compact.

Exercice 3

Soit $E := \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues à valeurs réelles sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

On considère les deux applications suivantes de E dans $\mathbb{R}$ définies par

$$T_1(f) = \int_0^1 f(t)dt\,, \quad T_2(f) = f(0)\,, \quad \forall f \in E$$

1. Montrer que T_1 et T_2 sont deux applications linéaires continues.
2. Déterminer la norme de chacune des applications T_1 et T_2.
3. En déduire que l'application linéaire $T = T_1 - T_2$ est continue.
4. Déterminer la norme de T.
5. Soit $\mathcal{A}$ la partie de E définie par

$$\mathcal{A} = \{f \in E, f(0) = 0 \; et \; T_1(f) \geq 1\}$$

a) En déduire de la question 1) que $\mathcal{A}$ est une partie fermée de E.

b) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{A}$

$$||f|| > 1\,.$$

c) Soit ϕ_n la fonction définie par

$$\phi_n(x) = \begin{cases} (n+1)x, & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 1 + \frac{1}{n}, & x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Vérifier que $\phi_n \in \mathcal{A}$ et que $\lim_{n\to\infty} ||\phi_n|| = 1$.

d) En déduire la distance de la fonction nulle à la partie $\mathcal{A}$, i.e.

$$d(0, \mathcal{A}) = \inf_{f\in\mathcal{A}} ||f||$$