Devoir

Le but du problème est d'étudier l'opérateur différentiel (oscillateur harmonique)

$$H = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Notations

• On notera $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace de Schwartz et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ l'espace des distributions tempérées.
• On notera le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R})$ par $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} g(t)\, dt$ et la norme par $||f|| = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\, dt$.

PARTIE I

On considère les opérateurs différentiels

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right) \quad \text{et} \quad A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right).$$

1) Montrer que $H = A^\dagger A + \frac{1}{2}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
2) Montrer que $AA^\dagger - A^\dagger A = \mathbb{1}$ puis que $A(A^\dagger)^n = (A^\dagger)^n A + n(A^\dagger)^{n-1}$, $\forall n \geq 2$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
3) On pose $\Omega = c_0 e^{-\frac{x^2}{2}}$ et $h_n(x) = c_n (A^\dagger)^n \Omega$ avec $c_0, c_n \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $h_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

b) Calculer les produits scalaires $\langle h_n, h_m\rangle$.

c) Trouver c_n pour que $||h_n|| = 1$.

4) Montrer que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.
5) On considère H comme opérateur sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que H est un opérateur symétrique.

b) Montrer que $(h_n)_n$ sont des vecteurs propres de H.

c) Calculer les valeurs propres λ_n associées aux h_n.

6) Montrer que H est essentiellement auto-adjoint.
7) Montrer que si $\lambda \notin (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors $Ker(H - \lambda\mathbb{1}) = \{0\}$.
8) Prouver que $\sigma(\overline{H}) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
9) Montrer que $(\overline{H} - i)^{-1}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

PARTIE II

On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} \Theta : L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\ f & \longmapsto & (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\langle h_n, f\rangle)_{n\in\mathbb{N}}\,; \end{array}$$

1) Vérifier que Θ est une transformation unitaire.
2) Montrer que $f \in D(\overline{H})$ si et seulement si $(a_n)_n = \theta(f)$ vérifie $(\lambda_n a_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$.
3) Prouver que $\Theta\overline{H}\Theta^{-1}(a_n)_n = (\lambda_n a_n)_n$.
4) Montrer que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide (i.e. $(n^k a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné pour tout $k \in \mathbb{N}$).
5) En déduire que $\Theta(\mathcal{S}(\mathbb{R}))$ est exactement l'espace des suites à décroissance rapide.
6) Montrer que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ si et seulement si $(\langle T, h_n\rangle)_n$ est une suite à croissance lente.
7) Résoudre l'EDP suivante

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dt}u(t,x) + Hu(t,x) = 0$$

pour $u(0,.) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ puis $u(0,.) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
8) On pose $U(t) = e^{-it\overline{H}}$. Déterminer $U(\pi/2), U(\pi), U(2\pi)$.

PARTIE III

On considère A et $A^\dagger$ comme opérateurs sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (i.e.: $D(A) = D(A^\dagger) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$).
1) Montrer que A et $A^\dagger$ sont fermables et que $\overline{A} \subset (A^\dagger)^*$ et $\overline{A^\dagger} \subset A^*$.
2) Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$||A^\dagger\varphi||^2 - ||A\varphi||^2 = ||\varphi||^2\,.$$

3) En déduire que $D(\overline{A}) = D(\overline{A^\dagger})$.
4) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit l'opérateur

$$\Phi(z) = \frac{\bar{z}A + zA^\dagger}{\sqrt{2}} \qquad \text{sur } \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

a) Montrer l'identité suivante sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\Phi(z_1)\Phi(z_2) - \Phi(z_2)\Phi(z_1) = i\mathrm{Im}(\bar{z}_1 z_2)\,\mathbb{1}\,, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

b) Montrer que $\Phi(z)$ est un opérateur symétrique.

c) Prouver que $\Phi(z)$ est essentiellement auto-adjoint.

d) On pose $W(z) = e^{i\overline{\Phi(z)}}$. Montrer la relation

$$W(z_1)W(z_2) = e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(z_1,z_2)}\,W(z_1+z_2)\,, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

PARTIE IV

On utilise dans cette partie les résultats sur le calcul pseudo-différentiel ainsi que la formule de composition des symboles

$$a_1 \sharp^W a_2(X) = \left(e^{\frac{i}{2}\sigma(D_{X_1},D_{X_2})}a_1(X_1)a_2(X_2)\right)\Big|_{X_1=X_2=X}$$

1) Montrer que l'oscillateur harmonique est le quantifié de Weyl de $a_H(x,\xi) = \xi^2 + x^2$.
3) Calculer explicitement $(a_H+1)^{-1}\sharp^W(a_H+1)$ et $(a_H+1)\sharp^W(a_H+1)^{-1}$ en vérifiant que le

développement est exact .
4) En utilisant la question précédente et le calcul pseudo-différentiel montrer que

$$x^\alpha \partial_x^\beta (1+H)^{-1} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))\,, \quad \text{pour } |\alpha|+|\beta| \leq 2\,.$$

5) En déduire que le domaine de $\bar{H}$ est $\left\{u \in L^2(\mathbb{R}), \quad x^\alpha \partial_x^\beta u \in L^2(\mathbb{R}),\ |\alpha|+|\beta| \leq 2\right\}$.
6) Pour un symbole $a \in \mathcal{S}^m$, calculer explicitement le symbole du commutateur $\left[H, a^W\right]$.
7) En déduire que $e^{it\bar{H}} a^W(x, D_x) e^{-it\bar{H}} = a_t^W(x, D_x)$ avec $a_t(x,\xi) = a(\cos(t)x - \sin(t)\xi, \sin(t)x + \cos(t)\xi)$.
8) Retrouver la formule de $Fa^W(x, D_x)F^{-1}$ quand F est la transformée de Fourier. Interpréter géométriquement dans l'espace des phases.