Licence 3 - Mathématiques 2010–2011

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Topologie des espaces métriques

Contrôle du mercredi 20/11/2010 (Durée : 1 heure)

Exercice 1

Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé et $T : E \longrightarrow E$ une application *linéaire*.

1) Montrer que si T est continue en $0 \in E$, on a :

$(\star)$ $\quad \exists C \in \mathbb{R}_+^* ; \quad ||T(x)||_E \leq C\,||x||_E, \quad \forall x \in E.$

$(\star)$ est vrai pour $x = 0$, Montrons le pour tout $x \neq 0$, $x \in E$.

T continue en $0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in E \ \|x\| < \eta \Rightarrow \|Tx\| < \varepsilon$

Pour $\varepsilon = 1$: on a $\|Tx\| < 1$, $\forall x \in B(0, \eta)$

Comme pour tout $x \in E$, $x \neq 0$ on a $\frac{x}{\|x\|}\eta/2 \in B(0,\eta)$ on en déduit que

$\|T(\frac{x}{\|x\|}\eta/2)\| < 1$. D'où : $\|Tx\| < \frac{2}{\eta}.\|x\|$, $\forall x \in E, x \neq 0$. (par linéarité de T).

2) Montrer que $(\star)$ implique la continuité de T sur E.

$(\star)$ implique que T est lipschitzienne :

$\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \overset{(\star)}{\leq} c\,\|x-y\|.$

T est lipschitzienne, donc T est continue sur E.

3) On suppose que T est continue sur E. En utilisant les suites, montrer que :

$$T(\bar{A}) \subset \overline{T(A)}, \qquad \forall A \subset E.$$

$y \in T(\bar{A}) \Rightarrow \exists y_1 \in \bar{A} : T(y_1) = y$

$\Rightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = y_1$ et $T(y_1) = y$

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

$\overset{(T \text{ est continue})}{\Rightarrow} \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} T(x_n) = y$

$\Rightarrow \exists (T(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in T(A)^{\mathbb{N}} : y = \lim_{n\to\infty} T(x_n)$

$\Rightarrow y \in \overline{T(A)}$.

Exercice 2

Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X.

1) Montrer que : $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) = 0 \implies x \in \bar{A}$.

$\inf_{y \in A} d(x,y) = 0 \Rightarrow \exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} : \lim_{n \to \infty} d(x, y_n) = d(x, A) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} y_n = x$ et $y_n \in A, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x \in \bar{A}$

2) Montrer que : $x \in \bar{A} \implies d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) = 0$.

$x \in \bar{A} \Rightarrow \exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} : \lim_{n \to \infty} y_n = x$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} d(y_n, x) = 0$

<u>OR</u> :

$0 \leq \inf_{y \in A} d(x,y) \leq d(x, y_n) \ , \forall n \in \mathbb{N}$

<u>Donc</u> : $\inf_{y \in A} d(x,y) = 0$ puisque $\lim_{n \to \infty} d(x, y_n) = 0$

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice 3

On considère $\mathbb{R}$ muni de la distance donnée par la valeur absolue. Soit $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

1) On considère l'ensemble $A := \{x \in \mathbb{R}\,;\ f(x) < g(x)\}$. Montrer que le complémentaire de A est un fermé.

$A = (f-g)^{-1}(]-\infty, 0[)$. f et g continue donc $f-g$ est continue

et $(f-g)^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert si $\mathcal{O}$ est un ouvert.

Donc A est un ouvert et donc A^c est un fermé.

2) On suppose que la frontière de A (notée $\mathrm{Fr}\,A$) est non vide. Soit $x \in \mathrm{Fr}\,A$. Quelle équation vérifie le point x ?

$\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \bar{A} \setminus A.$

$x \in \bar{A} \Rightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x$.

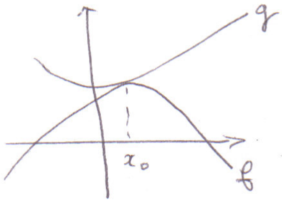
Comme $f(x_n) < g(x_n) \underset{f, g \text{ continue}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x) \leq \lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = g(x)$

$x \in \mathrm{Fr}(A) \Rightarrow x \in \bar{A}$ et $x \notin A$

$\Rightarrow f(x) \leq g(x)$ et $f(x) \geq g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$.

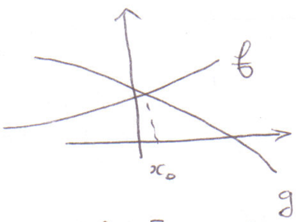
3) Dans cette question, on suppose que la frontière de A est réduite à un singleton. Autrement dit, il existe $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Fr}\,A = \{\bar{x}\}$.

3.a) Tracer l'esquisse d'une situation correspondant à ce cas de figure (on demande d'indiquer les positions respectives que peuvent prendre les graphes de f et de g).



$A = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$

Cas (1) :



$A =]-\infty, x_0[$

Cas (2) :

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

3.b) Rappeller quelles sont les parties connexes de $\mathbb{R}$?

les intervalles de $\mathbb{R}$.

3.c) Combien l'ensemble A possède-t'il de composantes connexes ?

Dans le cas(1) : 2 composantes connexes $]-\infty, x_0[$ et $]x_0, +\infty[$

Dans le cas (2) : 1 composante convexe $]-\infty, x_0[$.

4) On suppose ici que l'ensemble A est connexe borné et non vide. On pose :

$$\mathcal{S} := \{x \in \mathbb{R};\ f(x) = g(x)\}.$$

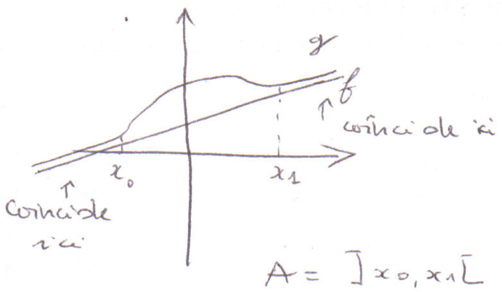
4.a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ contient au moins deux points.

A connexe, borné et non vide donc $A =]a, b[$ avec $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ (puisque A est en plus ouvert).

$a, b \in Fr(A)$ donc par la question 2) $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$.

D'où $\mathrm{card}(S) \geq 2$.

4.b) Tracer l'esquisse d'une situation pour laquelle l'ensemble $\mathcal{S}$ est de cardinal infini (par exemple contient une infinité de points).



$A =]x_0, x_1[$ connexe, borné.

$Fr(A) = \{x_0, x_1\}$

$S =]-\infty, x_0] \cup [x_1, +\infty[$