Ex: 2

1)

- $F=(f-g)^{-1}(\{0\})$ où $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues. $\{0\}$ est un fermé de $(\mathbb{R},|.|)$ et l'image réciproque d'un fermé par une app. continue est un fermé. Donc F un fermé.

- Autrement:

soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in F^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ dans $(\mathbb{R},|.|)$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f(x_n)=g(x_n)$ et comme f et g sont deux fonctions continues on voit que:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x)=\lim_{n\to\infty} g(x_n)=g(x).$$

D'où $x\in F$. Ainsi on a montré que F est un fermé de $(\mathbb{R},|.|)$ puisque pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in F^{\mathbb{N}}$ qui converge vers un x, on a que $x\in F$.

2) si f,g sont deux polynômes alors $f-g$ est aussi un polynôme. Ainsi

$F=(f-g)^{-1}\{0\}$ est l'ensemble des racines du polynômes $f-g$. or f et g sont distinctes donc le polynôme $f-g$ est non-nul. on sait qu'un polynôme non-nul n'admet qu'un nombre fini de racines. Donc F est de cardinal fini.

3) Toute partie finie d'un espace métrique (X,d) est compact. En effet: si $A=\{x_1,..,x_n\}$ et $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de A quelconque alors: $\forall k=1,..,n,\ \exists i_k: x_k\in\mathcal{O}_{i_k}$ (puisque $x_k\in\bigcup_{i\in I}\mathcal{O}_i$).

Donc $A=\{x_1,\dots,x_n\}\subset\bigcup_{k=1}^{n}\mathcal{O}_{i_k}$ un recouvrement ouvert fini. $\boxtimes$

4) a) si $f(x)=e^x$ et g un polynôme, alors:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x-g(x)=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty}|e^x-g(x)|=+\infty$$

Donc: $\exists m,M\in\mathbb{R}$: $(m<M)$
$$\begin{cases}\forall x\in\,]-\infty,m] & |e^x-g(x)|\geq 1\\ \forall x\in[M,+\infty[& e^x-g(x)\geq 1\end{cases}$$

on voit ainsi que $F \subset [m, M]$. d'où F est borné.

b) F est borné et d'après 1) F est fermé, donc F est une partie fermée bornée de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. d'où F est compact puisque les compacts de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sont les fermés bornés.

Ex: 3

1) T_1, T_2 sont deux applications linéaires (facile). Pour tout $f \in E$:

- $|T_1(f)| = |\int_0^1 f(t)\,dt| \leq \int_0^1 |f(t)|\,dt \leq \int_0^1 \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|\,dt = \|f\| \int_0^1 1\,dt = \|f\|.$

- $|T_2(f)| = |f(0)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \|f\|.$ $(*)$

Donc: $\forall f \in E, \exists C = 1 > 0, \quad |T_i(f)| \leq C\|f\| \quad i = 1, 2$

d'où les T_i sont continues $i = 1, 2$.

2) $i = 1, 2$:

$$|||T_i||| = \sup_{\|f\| = 1} |T_i(f)|$$

D'après $(*)$ on voit que: $|||T_i||| \leq 1$. Maintenant, si on prend $f_0(x) = 1, \forall x \in [0,1]$ alors: $\|f_0\| = 1$ et $T_i(f_0) = 1$, $i = 1, 2$ et donc:

$$1 = |T_i(f_0)| \leq |||T_i|||\ \|f_0\| \leq 1.$$

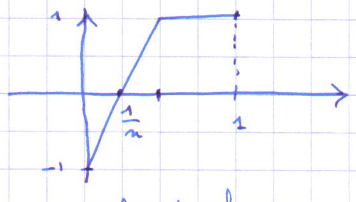
i.e: $|||T_i||| = 1, \quad i = 1, 2.$

3) $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$: l'espace vectoriel normé des formes linéaires continues muni de la norme $|||T||| = \sup_{\|f\| = 1} |T(f)|$, $\forall T \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Donc toute combinaison linéaire de T_1, T_2 appartient aussi à $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Ainsi $T_1 - T_2$ est une application (forme) linéaire continue.

4) Calculons la norme de $T = T_1 - T_2$



Le graphe de f_n

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx - 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- $|||T||| = |||T_1 - T_2||| \leq |||T_1||| + |||T_2||| = 2$.
- $\|f_n\| = 1$ et $T(f_n) = \int_0^1 f_n(t)\,dt - f_n(0) = 1 + \int_0^{\frac{1}{n}} (2nt-1)\,dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 1\,dt$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{n} + \left[nt^2 - t\right]_0^{1/n} = 2 - \cancel{\frac{1}{n}} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2.$$

Or: $|T(f_n)| \leq |||T|||\ \|f_n\|$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc $2 - \frac{1}{n} \leq |||T||| \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. D'où $|||T||| = 2$.

5)
$$A = T_2^{-1}(\{0\}) \cap T_1^{-1}([1, +\infty[)$$

a) T_1, T_2 continues et $\{0\}$, $[1,+\infty[$ fermés de $(\mathbb{R}, |.|)$ donc A est une intersection de deux fermés et ainsi A est un fermé de $(E, \|.\|)$.

b) sinon: $\exists f_0 \in A$; $\|f_0\| \leq 1$

i.e: $f_0(0) = 0$, $\int_0^1 f_0(t)\,dt \geq 1$ et $\|f_0\| = \sup_{[0,1]} |f_0(x)| \leq 1$.

- f_0 est continue en 0 et elle vaut 0 donc:

$\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists \eta \in]0,1]$, $(\forall x \in [0,\eta] \Rightarrow |f_0(x)| \leq \frac{1}{2}.)$.

Ainsi:

$$1 \leq \int_0^1 f_0(t)\,dt = \int_0^\eta f_0(t)\,dt + \int_\eta^1 f_0(t)\,dt \leq \int_0^\eta \frac{1}{2}\,dt + \int_\eta^1 1\,dt = 1 - \eta + \frac{\eta}{2} = 1 - \eta/2 < 1$$

absurde puisque $\eta > 0$.

c) φ_n continue sur $[0,1]$, $\varphi_n(0) = 0$ et $\int_0^1 \varphi_n(t)\,dt = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left[(n+1)\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{n}}$

$$= 1 - \frac{1}{n^2} + (n+1)\frac{1^2}{2n^2} = 1 + \underbrace{\left(\frac{n+1}{2} - 1\right)}_{\geq 0} \frac{1}{n^2} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

d) d'après 5.b): $(\|f\| > 1, \forall f \in A)$. Donc $\inf_{f \in A} \|f\| \geq 1$ (le plus grand des minorants)

D'un autre côté: $\varphi_n \in A$ et $\|\varphi_n\| = \sup_{[0,1]} |\varphi_n(t)| = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc

$1 \leq \inf_{f \in A} \|f\| \leq \|\varphi_n\| = 1 + \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. D'où $\inf_{f\in A} \|f\| = d(0, A) = 1$. ☒