Ex: 1

1) $\frac{d}{dt}\left(t(\ln(t)-1)\right) = \ln(t)$, $\forall t>0$.

$u(t) = t(\ln(t)-1)$ est une primitive de $\ln(t)$.

2) • $t \mapsto \ln(t)$ est loc. intégrable sur $]0,1]$, car elle est continue.

$$\int_0^1 \ln(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln(t)\,dt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[t(\ln(t)-1)\right]_\varepsilon^1$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\varepsilon\ln(\varepsilon)+\varepsilon + 1(\ln(1)-1)$$

$$= -1$$

L'intégrale généralisée $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ est convergente.

• $\forall t\in]0,1]$:

$$\left|\frac{\ln(t)}{1+t^2}\right| \leq -\frac{\ln(t)}{1+t^2} \leq -\ln(t)$$

Comme l'intégrale généralisée $\int_0^1 -\ln(t)\,dt = -\int_0^1 \ln(t)\,dt$ est convergente on en déduit que $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$ est abs. convergente.

3) $u = \frac{1}{t} \Rightarrow du = -\frac{1}{t^2}\,dt$

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt = -\int_\infty^1 \frac{\ln(1/u)}{1+\frac{1}{u^2}}\,\frac{du}{u^2} = -\int_1^\infty \frac{\ln(u)}{u^2+1}\,du \quad \text{(intégrale convergente).}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt + \int_1^\infty \frac{\ln(u)}{1+u^2}\,du = \int_0^\infty \frac{\ln(u)}{1+u^2}\,du = 0$$

4)
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2}\,dt.$$

a) chgt de variable $t = xu \Rightarrow dt = x\,du$, $\forall x>0$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(xu)}{x^2+x^2u^2}\,x.du = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)+\ln(u)}{1+u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{x}\left[\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+u^2}\,du + \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\,du}_{=0 \text{ grâce à } ③}\right]$$

$$= \frac{\ln(x)}{x}\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} \quad \text{(intégrale convergente)}$$

$$= \frac{\ln(x)}{x}\left[\arctan(+\infty) - \arctan(0)\right] = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\ln(x)}{x}.$$

b) Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que : $\forall a>0$:

* F est de classe $C^k(]a,+\infty[)$
* $F^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{\ln(t)}{x^2+t^2}\right)dt =$ $\quad (H_k)$

_pour $n=0$: * F est continue sur $]a,+\infty[$.

En effet : En utilisant le thm de continuité des ens, on a que :

* $(t,x) \mapsto \frac{1}{x^2+t^2}\cdot\ln(t)$ est continue sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ (produit et composition de fcts continues).
* $\forall t \in]0,+\infty[$, $\forall x \in]a,+\infty[$

$$\left|\frac{\ln(t)}{x^2+t^2}\right| \leq -\frac{\ln(t)}{a^2+t^2} = g(t)$$

avec $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ abs. convergente grâce à l'argument de ②.

Thm ② cons
$\Longrightarrow$ F est continue sur $]a,+\infty[$

supposons que (H_k) est vrai et montrons (H_{k+1}) : Alors

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\frac{\ln(t)}{x^2+t^2} = \sum_{p=0}^{k} Q_p(x)\,(x^2+t^2)^{-p-1} \quad \text{où } Q_p(x) : \text{polynôme de deg maximum } p.$$

* $(t,x) \to \frac{\partial^k}{\partial x^k}\frac{\ln(t)}{x^2+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

* $\forall x \in]a, +b[, \forall t \in]0, +\infty[$ (où $b > a > 0$) ; b arbitraire

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2} \right| \leq C \cdot \frac{-\ln(t)}{a^2+t^2} = g(t) \times c$$

(c : dépend de a et b). mais pas de t.

$\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ est abs. convergente

donc par le thm ② du cours on a F est de classe $C^{k+1}(]a, b[)$, $\forall b > a$ et

$$F^{(k+1)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2}\,dt \quad (*)$$

Comme a, b est arbitraire on en déduit que F est de classe $C^{k+1}(]0, +\infty[)$ avec $(*)$ vérifié.

D'où par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, F est de classe $C^k(]0, +\infty[)$ avec la bonne prop. de dérivée $(*)$.

c) En particulier

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -2x \frac{\ln(t)}{(x^2+t^2)^2}\,dt = \left(\frac{\pi}{2x} \ln(x)\right)' = \frac{\pi}{2x^2} - \frac{\pi}{2x^2} \ln(x).$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,dt = -\frac{1}{2} F'(1) = -\frac{\pi}{4}$$

Ex : 2

1) décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{(1+t^2)(t+1)} = \frac{\alpha}{t+1} + \frac{\gamma + \beta t}{1+t^2}.$$

• $\boxed{\frac{1}{2} = \alpha}$ • $t = 0 \Rightarrow 1 = \alpha + \gamma$ $\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} = \gamma}$ • $t \to \infty$: $0 = \alpha + \beta$ $\boxed{\beta = -\frac{1}{2}}$

$$\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)(t+1)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2} \ln(t+1)\Big]_0^1 + \frac{1}{2} \arctan(t)\Big]_0^1 - \frac{1}{4} \ln(1+t^2)\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln(2) = \frac{1}{4} \ln(2) + \pi/8.$$

2) Somme de Riemann

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^2}{(n^2+k^2)(k+n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1+(k/n)^2)(k/n+1)}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(t^2+1)(t+1)}\,dt = \frac{1}{4}\ln(2) + \pi/8.$$

Ex : 3

1) $\forall R > 1$

$$\int_1^R \frac{\sin(t+x)}{t}\,dt \overset{I.P.P}{=} \left[-\frac{1}{t}\cos(t+x)\right]_1^R - \int_1^R \frac{\cos(t+x)}{t^2}\,dt$$

$$= -\frac{\cos(R+x)}{R} + \cos(x) - \int_1^R \frac{\cos(t+x)}{t^2}\,dt$$

L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t+x)}{t^2}\,dt$ est abs. convergente car :

$$\left|\frac{\cos(t+x)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \text{ est convergente.}$$

D'où :

$$\lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{\sin(t+x)}{t}\,dt = \cos(x) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t+x)}{t^2}\,dt$$ est fini et l'intégrale

généralisée est convergente.

2) $F(0) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est convergente.

$-F(\pi/2) = -\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t+\pi/2)}{t}\,dt = +\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,dt$ est convergente.

3)
$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)\cos(x)}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\sin(x)\,dt$$

$$= \cos(x)\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,dt \cdot \sin(x)$$

D'où F est de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ comme somme et produit de fcts $C^\infty(\mathbb{R})$.

4] $F''(x) = \left[\cos(x)\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt + \sin(x)\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t}\,dt\right]''$

$= -\left(\cos(x)\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt + \sin(x)\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t}\,dt\right)$

$F''(x) + F(x) = 0.$

Ex:4

- $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dt = \lim_{\varepsilon\to 1^-}\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 1^-}\left[\operatorname{Arcsin}(x)\right]_0^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 1^-}\operatorname{Arcsin}(\varepsilon) = \operatorname{Arcsin}(1)$

$= \pi/2$

(Arcsin est continue $[-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$)

- $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x} - \arctan(\frac{1}{x})\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_1^R \frac{1}{x} - \arctan(\frac{1}{x})\,dx$

$\int_1^R \frac{1}{x} - \arctan(\frac{1}{x})\,dx = \left[\ln(x)\right]_1^R - \int_1^R \arctan(\frac{1}{x})\,dx = \ln(R) - \int_1^R \arctan(\frac{1}{x})\,dx$

$\int_1^R \arctan(\frac{1}{x})\,dx \overset{I.P.P}{=} \left[x.\arctan(\frac{1}{x})\right]_1^R + \int_1^{+R}\frac{x}{x^2+1}\,dx$

$= R\arctan(\frac{1}{R}) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(R^2+1) - \frac{1}{2}\ln(2).$

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x} - \arctan(\frac{1}{x})\,dx = \lim_{R\to+\infty}\ln(R) - R\arctan(\frac{1}{R}) + \pi/4 - \frac{1}{2}\ln(R^2+1) + \frac{1}{2}\ln(2)$

- $\arctan(\frac{1}{R}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{R}$ $\quad(\arctan(x) \underset{0}{\sim} x).$

- $\ln(R) - \frac{1}{2}\ln(R^2+1) = \ln(\frac{R}{\sqrt{R^2+1}}) \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

D'où $\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{1}{x} - \arctan(\frac{1}{x})\,dx = \frac{\pi}{4} + \ln(\sqrt{2}) - 1}$