• Opérateurs auto-adjoints :

1 Spectre essentiel, spectre discret :

A un opérateur a.a

Prop : $\lambda \in \sigma(A)$ ssi $\forall \varepsilon > 0$, $P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)}(A) \neq 0$

• Preuve :

1) si $\lambda_0 \in \rho(A)$ alors il existe $\epsilon > 0$, tq $P_{(\lambda_0-\varepsilon, \lambda_0+\varepsilon)}(A) = 0$

sinon : il existe u_n, $\|u_n\| = 1$, $P_{(\lambda_0 - 1/n, \lambda_0 + 1/n)}(A) u_n = u_n$

D'où : $\|(\lambda_0 - A) u_n\|^2 = \|(\lambda_0 - A) P_{(\lambda_0 - 1/n, \lambda_0 + 1/n)}(A) u_n\|^2$

$$= \int_{\sigma(A)} (\lambda_0 - \lambda)^2 \chi_{(\lambda_0 - 1/n, \lambda_0 + 1/n)}(\lambda) \, d\mu_{u_n}$$

$$\leq \sup_{\lambda \in (\lambda_0 - 1/n, \lambda_0 + 1/n)} |\lambda_0 - \lambda|^2 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

or : $1 = \|R_{\lambda_0}(A)(\lambda_0 - A) u_n\| \leq \|R_{\lambda_0}(A)\| \, \|(\lambda_0 - A) u_n\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

2) si $\lambda_0 \in I$ = un intervalle ouvert tq $P_I(A) = 0$ montrons que $\lambda_0 \in \rho(A)$.

en effet : $g(\lambda)(\lambda_0 - \lambda) = 1 - \chi_I(\lambda)$

pour $g(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_0 - \lambda} & \text{si } \lambda \notin I \\ 0 & \text{si } \lambda \in I \end{cases}$ $\quad g$ borélienne bornée.

Donc : $(\lambda_0 - A) g(A) = \mathbb{1} - \chi_I(A) = \mathbb{1}$ et $g(A) \in \mathcal{L}(H)$

$g(A)(\lambda_0 - A)$

d'où : $\lambda_0 \in \rho(A)$.

Déf : ① on dit que λ est dans le spectre essentielle de A si :

$$\forall \varepsilon > 0 : \ P_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(A) \neq 0 \text{ et } \mathrm{Ran}\left(P_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(A)\right) \text{ est de}$$

de dim infinie notation : $\sigma_{ess}(A)$

② on dit que λ est dans le spectre discret de A si :

$\lambda \in \sigma(A)$ et $P_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(A)\mathcal{H}$ est de dim finie pour un certain $\varepsilon > 0$. notation $\sigma_{disc}(A)$.

Prop : $\sigma_{ess}(A)$ est fermé.

Preuve : • $\lambda_n \to \lambda$, $\lambda_n \in \sigma_{ess}(A)$. $\forall \varepsilon > 0$, $(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)$ contient une infinité de λ_n.

$\Rightarrow$ $P_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(A)\mathcal{H}$ est de dim infinie

Thm : $\lambda \in \sigma_{disc}(A)$ ssi λ vérifie :

(i) λ est une valeur propre de multiplicité finie.

(ii) λ est un point isolé du spectre de A.

Preuve :

$\Leftarrow$: (i)+(ii) : $\exists \varepsilon > 0$: $P_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(A) = P_{\{\lambda\}}(A)$

et $P_{\{\lambda\}}(A) \neq 0$ puisque $P_{\{\lambda\}}(A)\mathcal{H} = \mathrm{Ker}(A - \lambda \mathbb{1})$

(i.e. $\psi = P_{\{\lambda\}}(A)\psi \Rightarrow A\psi = \lambda\psi$.)

$\Rightarrow$: $\lambda \in \sigma_{dis}(A)$, ~~il existe $\varepsilon > 0$ tq $P_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(A)\mathcal{H}$ de dim finie $\neq \{0\}$. $\mathcal{H}_0 = P_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(A)\mathcal{H}$, alors $A|_{\mathcal{H}_0} : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$ est un opérateur auto-adjoint~~ borné

Montrons que λ_0 est isolé du reste du spectre : sinon il existe $\lambda_n \neq \lambda_0$ tq $\lambda_n \to \lambda$ d'où $P_{(\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon)}(A) \geq \sum_{i=1}^{N} \underbrace{P_{(\lambda_i-\eta_i,\lambda_i+\eta_i)}(A)}_{\neq 0} \Rightarrow$ dim infini

TSVP

Donc λ_0 est isolé : i.e.

$$P_{(\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon)}(A) = P_{\{\lambda_0\}}(A) \text{ pour un certain } \varepsilon.$$

et $\varphi = P_{\{\lambda_0\}}(A)\varphi \iff \varphi \in \mathrm{Ker}(A-\lambda)$.

$P_{\{\lambda_0\}}(A)\mathcal{H} = \mathrm{Ker}(A-\lambda)$ de dim finie.

<u>Thm:</u> (critère de Weyl) $\lambda \in \sigma(A) \iff \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n \in D(A)$ tq :

$$\|u_n\| = 1, \qquad \|(\lambda - A)u_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (*)$$

si de plus $\varphi_n \rightharpoonup 0$ alors $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$.

<u>Preuve:</u>

<u>$\Leftarrow$</u>: si $\lambda \in \rho(A)$ alors $\|R_\lambda(A)(\lambda - A)u_n\| = \|u_n\| = 1 \leq \|R_\lambda(A)\| \cdot \|(\lambda - A)u_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

<u>contradiction</u>.

<u>$\Rightarrow$</u>: (*) n'est pas vérifiée alors :

$$\|(\bar{\lambda} - A)u\| = \|(\lambda - A)u\| \geq c, \quad \forall u \in D(A), \|u\| = 1.$$

i.e. $\|(\bar{\lambda} - A)u\| = \|(\lambda - A)u\| \geq c\|u\|, \ \forall u \in D(A)$.

- $\mathrm{Ran}(\lambda - A)$ est fermé.
- $\mathrm{Ran}(\lambda - A)$ est dense :

$$\mathrm{Ker}(\bar{\lambda} - A) = \{0\} \text{ et } \mathrm{Ker}(\bar{\lambda} - A)^\perp = \overline{\mathrm{Ran}(\lambda - A)} = \mathcal{H}$$

$\boxed{2}$ spectre <u>ponctuelle</u>, <u>absolument continue</u>, <u>singulière</u> :

<u>Déf</u>: μ, ν deux mesures boreliennes sur $\mathbb{R}$. on dit que

(i) μ est une mesure <u>purement ponctuelle</u> si

$$\mu(B) = \sum_{x\in B} \mu(\{x\}), \quad \forall B \text{ borelien de } \mathbb{R}$$

(ii) μ est une mesure <u>continue</u> si

$$\mu(\{x\}) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(iii) μ est mesure <u>absolument continue</u> s'il existe $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

tq : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} g f \, dx$ (i.e. par rapport à la mesure de Lebesgue).

(iv) μ est **singulière** s'il existe S tq $\mathbb{R}\setminus S$ est négligeable et

$$\mu(S) = 0.$$

on définit : A a.a. et $(\mu_\psi)_{\psi \in \mathcal{H}}$ mesure spectrale.

$$\mathcal{H}_{pp} = \{\psi \in \mathcal{H} \mid \mu_\psi \text{ est purement ponctuelle}\}$$

$$\mathcal{H}_{c} = \{\psi \in \mathcal{H} \mid \mu_\psi \text{ est continue}\}$$

$$\mathcal{H}_{ac} = \{\psi \in \mathcal{H} \mid \mu_\psi \text{ est abs. continue}\}$$

$$\mathcal{H}_{sc} = \{\psi \in \mathcal{H} \mid \mu_\psi \text{ est sing. continue}\}.$$

Thm : A a.a. :

(i) $\mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sc} = \mathcal{H}_c$

(ii) $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pp} \oplus \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sc}$

(iii) $\mathcal{H}_{pp} = \overline{\mathrm{vect}\{\psi,\ \psi \text{ vecteurs propres de } A\}}$

• **Rmq :** si μ et ν sont deux mesures étrangères $\mu \perp \nu$.
i.e. $\exists S$ tq $\mu(S) = 0$, $\nu(\mathbb{R}\setminus S) = 0$. alors

$$L^2(M, \mu+\nu) = L^2(M,\mu) \oplus L^2(M,\nu).$$

Déf : on définit le spectre :

purement ponctuelle $\sigma_{pp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} / \ \mathrm{Ker}(\lambda - A) \neq 0\}$

absolument continue $\sigma_{ac}(A) = \sigma(A|_{\mathcal{H}_{ac}})$

singulière continue $\sigma_{sc}(A) = \sigma(A|_{\mathcal{H}_{sc}})$

on a : $\sigma(A) = \overline{\sigma_{pp}(A)} \cup \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_{sc}(A)$.

Rem : la réunion n'est pas disjointe en général.

Prop : A un opérateur symétrique fermé ; alors

$\mathbb{C}_+ \ni \lambda \longmapsto \dim \mathrm{Ker}(\lambda - A^*)$ et $\mathbb{C}_- \ni \lambda \longmapsto \dim(\mathrm{Ker}(\lambda - A^*))$

sont deux fonctions constantes.

ici : $\mathbb{C}_+ = \{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0 \}$ et $\mathbb{C}_+ = \{ z \in \mathbb{C} ; \mathrm{Im}(z) < 0 \}$.

Preuve : $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

Pour $x \in D(A)$:

(*) $\|(\lambda - A)x\|^2 = \|(\bar\lambda - A)x\|^2 = \|(\alpha - A)x\|^2 + \beta^2\|x\|^2 \geq \beta^2 \|x\|^2$.

Donc $(\lambda - A)$ est injective et $\mathrm{Ran}(\lambda - A)$ est fermé de plus

$$\mathrm{Ran}(\lambda - A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^* - \bar\lambda)$$

~~donc $\mathrm{Ran}(\lambda - A) = H$.~~

• si $\eta \in \mathbb{C}$, montrons que $\dim \mathrm{Ker}(\lambda + \eta - A) = \dim \mathrm{Ker}(\lambda - A)$ pour η assez petit :

si $u \in \mathrm{Ker}(\lambda + \eta - A^*)$; $\|u\| = 1$, $u \perp \mathrm{Ker}(\lambda - A^*)$ alors

$$u \in \mathrm{Ran}(\bar\lambda - A) \Rightarrow u = (\bar\lambda - A)x.$$

Donc :

$$0 = \langle (\lambda + \eta - A^*)u, x \rangle = \langle u ; u + \bar\eta x \rangle = \|u\|^2 + \bar\eta \langle u, x \rangle$$

or (*) implique

$$\beta^2 \|x\|^2 \leq \|(\bar\lambda - A)x\|^2 = 1 \Rightarrow \|x\| \leq 1/\beta.$$

Donc pour $|\eta| < |\beta| \Rightarrow |\bar\eta \langle u, x \rangle| = 1 < |\beta| \cdot \frac{1}{|\beta|} = 1$

absurde ! D'où il n'existe pas de $u \in \mathrm{Ker}(\lambda + \eta - A^*)$ tq $u \in \mathrm{Ker}(\lambda - A^*)^\perp$, pour $|\eta| < |\beta|$.

Ceci implique:

$$\dim\left[\ker(\lambda+\eta-A^*)\right] \leq \dim\left[\ker(\lambda-A^*)\right]$$

Demo: suppos qu'il existe $u \in \ker(\lambda-A^*)$, $\|u\|=1$ et q

$u \in \ker(\lambda+\eta-A^*)^{\perp} = \mathrm{Ran}(\bar\lambda+\bar\eta-A)$

donc $u = (\bar\lambda+\bar\eta-A)x$ et par $(*)$ on a

$$1 = \|\underbrace{(\bar\lambda+\bar\eta-A)x}_{u}\| \geq |\beta+\mathrm{Im}(\eta)|\ \|x\|.$$

De plus:

$$0 = \langle(\lambda-A^*)u, x\rangle = \langle u, u-\bar\eta x\rangle = 1-\langle u,x\rangle\bar\eta$$

si $|\eta|<|\beta|/2$:

$$1 = |\bar\eta\langle u,x\rangle| < \frac{|\beta|}{2}\cdot\|x\| \leq \frac{|\beta|}{2}\cdot\frac{1}{|\beta+\mathrm{Im}(\eta)|} \leq 1.$$

i.e. $\pm\mathrm{Im}(\eta) < \frac{|\beta|}{2} \Rightarrow \frac{1}{|\beta+\mathrm{Im}(\eta)|} < \left(\frac{|\beta|}{2}\right)^{-1}$

$\frac{|\beta|}{2} \leq |\beta|-\mathrm{Im}(\eta) < |\beta+\mathrm{Im}(\eta)| \Rightarrow \frac{1}{|\beta+\mathrm{Im}(\eta)|} < \frac{2}{|\beta|}.$

absurde!

D'où $\nexists\, u \in \ker(\lambda-A^*)$, $\|u\|=1$ tq $u \in \ker(\lambda+\eta-A^*)^{\perp}$.

donc $\dim\left[\ker(\lambda-A^*)\right] \leq \dim\left[\ker(\lambda+\eta-A^*)\right]$

d'où l'égalité: pour η tq $|\eta| < |\beta|/2$

$\mathbb{C}_\pm \ni \lambda \longmapsto \dim(\ker(\lambda-A^*))$ sont localement constantes donc constantes.

Déf: A est un op. symétrique (fermé). On appelle

$n_+ = \dim[\ker(i-A^*)]$ les indices de défauts

$n_- = \dim[\ker(i+A^*)]$ de A.

Corollaire :

A symétrique fermé. alors A est a.a ssi

$n^+(A) = n^-(A) = 0$

Thm : (Von Neumann)

A symétrique fermé. les extensions symétriques fermé de A sont en bijection avec les isométries partielles d'espace initial $I(U) \subset \mathcal{K}^+ = \mathrm{Ker}(i - A^*)$ [à] valeurs dans $\mathcal{K}_- = \mathrm{Ker}(i + A^*)$.

Pour chaque U isométrie partielle on associe $(A_U, D(A_U))$ défini par :

$$D(A_U) = \{ \varphi + \varphi_+ + U\varphi_+ \mid \varphi \in D(A) ; \varphi_+ \in I(U) \}$$

$$A_U(\varphi + \varphi_+ + U\varphi_+) = A\varphi + i\varphi_+ - iU\varphi_+$$

si dim $I(U)$ est fini alors :

$$n_\pm(A_U) = n_\pm(A) - \dim(I(U)).$$