Opérateurs non-bornés

1 Domaine, graphe et fermeture

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. On rappelle que $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ est l'espace de Hilbert $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ muni du produit scalaire $\langle (x,y),(x',y')\rangle = \langle x,x'\rangle_{\mathcal{H}} + \langle y,y'\rangle_{\mathcal{H}}$.

Définition 1.1 *Un opérateur dans $\mathcal{H}$ est une application linéaire T définie sur un sous-espace vectoriel $D(T)\subset\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{H}$. $D(T)$ est appelé le domaine de l'opérateur.*

On note un opérateur par $(T,D(T))$ mais s'il n'y a pas d'ambiguïté concernant son domaine on pourra noter simplement par T.

Définition 1.2 *On dit qu'un opérateur $(T,D(T))$ dans $\mathcal{H}$ est borné si $D(T)=\mathcal{H}$ et $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ est continue.*

Définition 1.3
1. Le **graphe** *d'un opérateur $(T,D(T))$ est le sous-espace de $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ donné par*

$$\Gamma(T)=\{(x,Tx) : x\in D(T)\}\subset\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\,.$$

2. On dit que $(S,D(S))$ est une **extension** *de $(T,D(T))$ si $D(T)\subset D(S)$ et $Tx=Sx$ pour tout $x\in D(T)$, (Autrement dit, $\Gamma(T)\subset\Gamma(S)$).*
3. On dit que $(T,D(T))$ est **fermé** *si son graphe $\Gamma(T)$ est un fermé de $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$.*

Proposition 1.4 *Un opérateur $(T,D(T))$ est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de $D(T)$ telle que $\lim_n x_n = x$ et $\lim_n Tx_n = y$ on a alors $x\in D(T)$ et $y=Tx$.*

Preuve. En exercice. □

On note $p_i:\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\to\mathcal{H}$, $i=1,2$, les deux projections données respectivement par $p_1(x,y)=x$ et $p_2(x,y)=y$.

Lemme 1.5 *Un sous-espace G de $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ est le graphe d'un opérateur si et seulement si*

$$((0,y)\in G \Rightarrow y=0). \tag{1}$$

Preuve. Si la propriété (1) est vraie alors $(x,y_1)\in G$ et $(x,y_2)\in G$ implique que $y_1=y_2$. Donc, l'application $T:p_1G\to\mathcal{H}$ qui associe à $x\in p_1G$, l'unique $y\in\mathcal{H}$ tel que $(x,y)\in G$ est bien définie et possède G comme son graphe. □

Exemples. Si $D(T)=\{(x_n)_n\in\ell^2(\mathbb{N}) : \sum_{n=0}^{\infty} n^2|x_n|^2<\infty\}$, $T:D(T)\to\ell^2(\mathbb{N})$ avec $(Tx_n)_n = (nx_n)_n$, alors $(T,D(T))$ est un opérateur.

Proposition 1.6 *Soit $(T,D(T))$ un opérateur fermé. Alors T est borné si et seulement si $D(T)=\mathcal{H}$.*

Preuve. En appliquant le théorème du graphe fermé. □

Définition 1.7 *On dit qu'un opérateur $(T,D(T))$ est* **fermable** *s'il possède une extension fermé.*

Proposition 1.8 *Tout opérateur fermable $(T,D(T))$ admet une plus petite extension fermé notée $\overline{T}$. De plus, on a*

$$\Gamma(\overline{T})=\overline{\Gamma(T)}\,.$$

Preuve. Pour toute extension S fermée de T, il en existe au moins une, on a $\Gamma(T) \subset \Gamma(S)$ avec $\Gamma(S)$ un fermé de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. D'où, on a $\overline{\Gamma(T)} \subset \Gamma(S)$. De plus, par lemme 1.5 $\overline{\Gamma(T)}$ est le graphe d'un opérateur fermé, noté $\overline{T}$, puisque $(0, y) \in \overline{\Gamma(T)} \subset \Gamma(S)$ implique que $y = 0$. Enfin, il est claire $\overline{T}$ est la plus petite extension fermée de T puisque $\Gamma(\overline{T}) = \overline{\Gamma(T)} \subset \Gamma(S)$ pour toute extension fermée S de T. □

On remarque aussi que si $(T, D(T))$ est un opérateur fermable alors

$$\overline{\Gamma(T)} = \bigcap_{i \in I} \Gamma(T_i)\,,$$

où $(T_i, D(T_i))_{i \in I}$ est la famille de toutes les extensions fermés de $(T, D(T))$ (il existe au moins une).

Définition 1.9 *On dit qu'un opérateur $(T, D(T))$ est à* **domaine dense** *si $\overline{D(T)} = \mathcal{H}$.*

Exercice. Montrer que $P = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$ avec $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et

$$D(P) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) : Pu \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$$

est un opérateur fermé à domaine dense.

2 Adjoint

Définition 2.1 *L'adjoint d'un opérateur $(T, D(T))$ à domaine dense est l'unique opérateur T^* ayant pour domaine*

$$D(T^*) = \{x \in \mathcal{H} : D(T) \ni y \mapsto \langle x, Ty \rangle \text{ est continue }\}$$

et vérifiant

$$\forall x \in D(T^*), \forall y \in D(T) \quad \langle T^* x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle\,.$$

Grâce à la densité de $D(T)$ dans $\mathcal{H}$, pour chaque $x \in D(T^*)$ la forme linéaire $y \mapsto \langle x, Ty \rangle$ s'étend à un unique élément de $\mathcal{H}^*$ qu'on écrit par le Théorème de Riesz comme $\langle T^* x, . \rangle_{\mathcal{H}}$.

On considère l'isométrie $J : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, $J(x, y) = (-y, x)$ pour tout $x, y \in \mathcal{H}$. En particulier, on a $J^2(x, y) = -(x, y)$ et si E est un sous-espace de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ alors $J(E^\perp) = J(E)^\perp$.

Proposition 2.2 *Soit $(T, D(T))$ un opérateur à domaine dense. Alors*
(i) $\Gamma(T^*) = [J\Gamma(T)]^\perp$.
(ii) $\overline{\Gamma(T)} = [J\Gamma(T^*)]^\perp$.

Preuve. *(i)* On a

$$\begin{aligned} (x, y) \in \Gamma(T^*) &\Leftrightarrow (x, Tz) = (y, z), \forall z \in D(T) \\ &\Leftrightarrow \langle (x, y), (-Tz, z) \rangle = 0, \forall z \in D(T) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in J\Gamma(T)^\perp. \end{aligned}$$

(ii) On a

$$\overline{\Gamma(T)} \;=\; \left(\Gamma(T)^\perp\right)^\perp = \left(J^2\Gamma(T)^\perp\right)^\perp = \left(J[J\Gamma(T)]^\perp\right)^\perp = J\Gamma(T^*)^\perp\,.$$

□

Théorème 2.3 *Soit $(T, D(T))$ un opérateur à domaine dense. Alors*

(a) *T^* est fermé.*

(b) *T est fermable si et seulement si $D(T^*)$ est dense.*

(c) *Si T est fermable alors $\overline{T} = T^{**}$ et $(\overline{T})^* = T^*$.*

Preuve. (a) L'opérateur T^* est fermé puisque son graphe est l'orthogonal d'un sous-espace de $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ d'après la Proposition 2.2 (i).
(b) Si T^* est à domaine dense alors par la Proposition 2.2 on a

$$\Gamma(T^{**}) = [J\Gamma(T^*)]^\perp = \overline{\Gamma(T)}. \tag{2}$$

Il en résulte que $\overline{\Gamma(T)}$ est le graphe d'un opérateur et donc T est fermable. D'autre part, si $D(T^*)$ n'est pas dense alors il existe $y \neq 0$ appartenant à $D(T^*)^\perp$. Ainsi, on vérifie que $(y, 0) \in \Gamma(T^*)^\perp$ et que $(0, y) \in \overline{\Gamma(T)} = J\Gamma(T^*)^\perp$. Par conséquence, T n'est pas fermable puisque $\overline{\Gamma(T)}$ n'est pas le graphe d'un opérateur vu qu'il contient $(0, y)$ avec $y \neq 0$.
(c) Il en résulte de (2) que $T^{**} = \overline{T}$. En utilisant ceci avec le point (a), on voit que

$$T^* = \overline{T^*} = (T^*)^{**} = (T^{**})^* = (\overline{T})^*\,.$$

□

Proposition 2.4 *Soit T un opérateur fermable à domaine dense sur $\mathcal{H}$, alors*

$$\begin{array}{lcl} Ker(\overline{T})^\perp = \overline{Ran(T^*)} & \quad et \quad & Ker(T^*) = Ran(T)^\perp \\ Ker(\overline{T}) = Ran(T^*)^\perp & \quad et \quad & Ker(T^*)^\perp = \overline{Ran(T)}\,. \end{array}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} y \in Ran(T^*)^\perp \Leftrightarrow (\langle y, T^*x\rangle = 0, \forall x \in D(T^*)) \quad &\Leftrightarrow \quad (y \in D(\overline{T}) \text{ et } \langle Ty, x\rangle = 0, \forall x \in D(T^*)) \\ &\Leftrightarrow \quad y \in Ker(\overline{T})\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \in Ran(T)^\perp \Leftrightarrow (\langle y, Tx\rangle = 0, \forall x \in D(T)) \quad &\Leftrightarrow \quad (y \in D(T^*) \text{ et } \langle T^*y, x\rangle = 0, \forall x \in D(T)) \\ &\Leftrightarrow \quad y \in Ker(T^*)\,. \end{aligned}$$

Les deux autres relations s'obtiennent en prenant l'orthogonale et en remarquant que $Ker(\overline{T})$ est fermé. □

3 Résolvante et spectre

Lemme 3.1 *Une suite $(x_n)_n$ dans un Banach X est fortement convergente si et seulement si $(\ell(x_n))_n$ est convergente uniformément pour tout $\ell \in X^*, ||\ell||_{X^*} \leq 1$.*

Preuve. Il suffit de remarquer, par [Chap. 1, Corollaire 1.8], que

$$||x_n - x_m||_X = \sup_{\substack{\ell \in X^* \\ ||\ell||_{X^*} \leq 1}} |\ell(x_n) - \ell(x_m)|\,.$$

□

Exercice. Soit f une fonction définie sur un compact K du plan complexe à valeurs dans un espace de Banach X. On dit que f est faiblement continue si pour tout $\ell \in X^*$, l'application $K \ni z \mapsto \ell(f(z))$ est continue. Montrer que

$$\sup_{z \in K} ||f(z)||_X < \infty\,. \tag{3}$$

On dit qu'une fonction $f : D \to X$ définie sur un domaine ouvert du plan complexe à valeurs dans un Banach X est *fortement holomorphe* si

$$\lim_{z \to z_0, z \in D} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe dans X pour tout $z_0 \in D$.

Théorème 3.2 *Soit $f : D \to X$ une fonction définie sur un domaine ouvert du plan complexe. Si pour tout $\ell \in X^*$, la fonction $D \ni z \mapsto \ell(f(z))$ est holomorphe sur D alors f est fortement holomorphe sur D.*

Preuve. Soit γ un contour simple positivement orienté dans D, alors par la formule de Cauchy on a

$$\ell(f(\xi)) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\ell(f(z))}{z-\xi}\, dz\,,$$

pour ξ à l'intérieur de γ. Il en découle que

$$\frac{\ell(f(\xi+\eta)) - \ell(f(\xi))}{\eta} - \frac{d}{d\xi}\ell(f(\xi)) = \frac{\eta}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\ell(f(z))}{(z-(\xi+\eta))(z-\xi)^2}\, dz$$

pour η dans un voisinage $\mathcal{V}$ de 0. On obtient alors l'estimation uniforme

$$\left| \frac{\ell(f(\xi+\eta)) - \ell(f(\xi))}{\eta} - \frac{d}{d\xi}\ell(f(\xi)) \right| \leq M|\eta|\ ||\ell||_{X^*}\,,$$

pour tout $\ell \in X^*$ et pour tout $\eta \in \mathcal{V}$ en utilisant notamment (3). Il en résulte que $\eta^{-1}\ell(f(\xi+\eta) - f(\xi))$ converge uniformément pour tout $\ell \in X^*$, $||\ell|| \leq 1$. Par le lemme 3.1, on en déduit que

$$\lim_{\eta\to 0, \eta\in\mathcal{V}} \frac{f(\xi+\eta)-f(\xi)}{\eta}$$

existe et donc f est fortement holomorphe. □

Définition 3.3 *Soit T un opérateur fermé. L'ensemble résolvant de T est l'ensemble, noté $\rho(T)$, des nombres complexes λ tels que $T - \lambda\mathbb{1} : D(T) \to \mathcal{H}$ est bijective avec un inverse continue. Le spectre de T est l'ensemble $\sigma(T) = \mathbb{C}\setminus\sigma(T)$. Pour $\lambda \in \rho(T)$, l'opérateur borné $R_\lambda(T) := (\lambda\mathbb{1} - T)^{-1}$ est appelé la résolvante de T en λ.*

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda\mathbb{1} - T : D(T) \to \mathcal{H}$ n'est pas injective, c'est à dire il existe $x \neq 0$ tel que $Tx = \lambda x$, alors on dit que λ est une valeur propre de T et x un vecteur propre associé à λ. L'ensemble des valeurs propres d'un opérateur T est appelé *le spectre ponctuel* de T.
On appelle *spectre résiduel* de T tout $\lambda \in \sigma(T)$ tel que λ n'est pas une valeur propre et $Ran(\lambda\mathbb{1} - T)$ n'est pas dense dans $\mathcal{H}$.

Proposition 3.4 *Soit T un opérateur fermé à domaine dense. Alors:*
(i) L'ensemble résolvent de T est un ouvert de $\mathbb{C}$.
(ii) L'application $\rho(T) \ni \lambda \mapsto R_\lambda(T)$ est fortement holomorphe.
(iii) Pour $\lambda, \mu \in \rho(T)$, on a la formule

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda)R_\mu(T)\, R_\lambda(T) = (\mu-\lambda)R_\lambda(T)\, R_\mu(T)\,.$$

Preuve. (i) Pour $\lambda_0 \in \rho(T)$ et λ tel que $|\lambda - \lambda_0| < ||(\lambda_0\mathbb{1} - T)^{-1}||$, on a une série absolument convergente de Neumann

$$B_\lambda := (\lambda_0\mathbb{1} - T)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda)^k(\lambda_0\mathbb{1} - T)^{-k}\,. \tag{4}$$

De plus, on vérifie que $(\lambda\mathbb{1} - T)B_\lambda = \mathbb{1}$ et $B_\lambda(\lambda\mathbb{1} - T)_{|D(T)} = \mathbb{1}_{|D(T)}$ en remarquant notamment que $B_\lambda\mathcal{H} \subset D(T)$. En particulier, l'identité $(\lambda\mathbb{1} - T)B_\lambda = \mathbb{1}$ entraîne la surjectivité, $B_\lambda(\lambda\mathbb{1} - T)_{|D(T)} = \mathbb{1}_{|D(T)}$ garantie l'injectivité et $B_\lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est l'inverse de $(\lambda\mathbb{1} - T)$.
(ii) En utilisant (4) avec $R_\lambda(T) = B_\lambda$, on a

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T)}{\lambda - \lambda_0} = -(\lambda_0\mathbb{1} - T)^{-2}\,.$$

D'où, l'application $\rho(T) \ni \lambda \mapsto R_\lambda(T)$ est fortement holomorphe.
(iii) L'identité de la résolvante découle de

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = R_\lambda(T)(\mu\mathbb{1} - T)R_\mu(T) - R_\lambda(T)(\lambda\mathbb{1} - T)R_\mu(T)\,.$$

□

4 Opérateur auto-adjoint

Définition 4.1 *Un opérateur T à domaine dense est dit* **symétrique** *si $T \subset T^*$, i.e.:*

$$D(T) \subset D(T^*) \quad et \quad Tx = T^*x, \forall x \in D(T).$$

Autrement dit,

$$\forall x \in D(T), \forall y \in D(T) \quad (Tx, y) = (x, Ty).$$

Définition 4.2 *On dit qu'un opérateur T à domaine dense est auto-adjoint si $T^* = T$, i.e.:*

$$D(T) = D(T^*) \quad et \quad Tx = T^*x, \forall x \in D(T).$$

Remarque 4.3 *(i) Un opérateur symétrique T est toujours fermable puisque $D(T^*) \supset D(T)$ est dense (voir Théorème 2.3).*
(ii) Si T est un opérateur symétrique alors T^* et T^{**} sont deux extensions fermées de T avec

$$T \subset T^{**} \subset T^* .$$

(iii) Si T est un opérateur symétrique fermé alors

$$T = T^{**} \subset T^* .$$

(iv) Si T est un opérateur auto-adjoint alors

$$T = T^{**} = T^* .$$

Théorème 4.4 *Soit T un opérateur symétrique. Les assertions suivantes sont équivalentes.*
(i) T est auto-adjoint.
(ii) T est fermé et $Ker(T^* \pm i) = \{0\}$.
(iii) $Ran(T \pm i) = \mathcal{H}$.

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$: Soit T est auto-adjoint et $\varphi \in D(T^*) = D(T)$ tel que $\varphi \in Ker(T^* \pm i)$. Il suit alors que

$$\pm i\langle \varphi, \varphi\rangle = \langle \mp i\varphi, \varphi\rangle = \langle T^*\varphi, \varphi\rangle = \langle \varphi, T\varphi\rangle = \langle \varphi, T^*\varphi\rangle = \mp i\langle \varphi, \varphi\rangle .$$

D'où $\varphi = 0$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Soit $y \in Ran(T \pm i)^\perp$ alors $\langle (T \pm i)x, y\rangle = 0$ pour tout $x \in D(T)$. Il suit alors que $y \in D(T^*)$ et que $T^*y = \pm iy$. c'est à dire que $y \in Ker(T^* \mp i) = \{0\}$ et donc $Ran(T \pm i)$ est dense dans $\mathcal{H}$. Montrons que $Ran(T \pm i)$ est fermé. En effet, on a pour tout $x \in D(T)$

$$||(T \pm i)x||^2 = ||Tx||^2 + ||x||^2$$

puisque T est symétrique. Ceci entraîne que si $x_n \in D(T)$ est une suite telle que $(T \pm i)x_n \to y$ alors x_n converge vers un x. Comme T est fermé on en déduit que $x \in D(T)$ et $(T \pm i)x = y$. D'où $y \in Ran(T \pm i)$ et ainsi on a montré que $Ran(T \pm i) = \mathcal{H}$.
$(iii) \Rightarrow (i)$: Soit $x \in D(T^*)$, comme $Ran(T \pm i) = \mathcal{H}$ il existe $y \in D(T)$ tel que $(T - i)y = (T^* - i)x$. Puisque $T \subset T^*$, on a alors $x - y \in D(T^*)$ et $(T^* - i)(x - y) = 0$. Il en résulte que

$$x - y \in Ker(T^* - i) = Ran(T + i)^\perp = \mathcal{H}^\perp = \{0\}.$$

D'où $x = y \in D(T)$. □

Théorème 4.5 *le spectre d'un opérateur auto-adjoint $(T, D(T))$ est toujours réel, i.e: $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in D(T)$, on a par un calcul direct

$$||(\lambda 1\!\!1 - T)x||^2 = ||(\alpha 1\!\!1 - T)x||^2 + \beta^2 ||x||^2 . \tag{5}$$

On en déduit que $(\lambda 1\!\!1 - T)$ est injective. Montrons que $Ran(\lambda 1\!\!1 - T)$ est un fermé. En effet, soit $(y_n)_n$ une suite convergente vers $y \in \mathcal{H}$ telle que $y_n = (\lambda 1\!\!1 - T)x_n$ avec $x_n \in D(T)$. Il résulte de (5) que $(x_n)_n$ converge vers $x \in \mathcal{H}$. Comme T est fermé, la suite $(x_n, Tx_n) \in \Gamma(T)$ converge dans $\Gamma(T)$ vers $(x, \lambda x - y)$. Par conséquent, $x \in D(T)$ et $\lambda x - y = Tx$.
Montrons que $Ran(\lambda 1\!\!1 - T)$ est dense dans $\mathcal{H}$. Soit $y \in Ran(\lambda 1\!\!1 - T)^\perp$ alors

$$\langle y, Tx \rangle = \lambda \langle y, x \rangle , \quad \forall x \in D(T).$$

Il en résulte que $y \in D(T^*) = D(T)$ et que $T^* y = Ty = \overline{\lambda} y$ puisque $D(T)$ est dense. D'où, $y = 0$ en utilisant (5) avec $\bar{\lambda}$ à la place de λ. On en déduit que $(\lambda 1\!\!1 - T)$ est inversible. De plus, on a l'inégalité

$$|\beta| \, ||(\lambda 1\!\!1 - T)^{-1} y \leq ||y||, \quad \forall y \in \mathcal{H},$$

qui découle de (5). □

Définition 4.6 *Soit T un opérateur fermé. Un sous-espace D de $\mathcal{H}$ est dit un cœur pour T s'il vérifie $\overline{T_{|D}} = T$.*

Définition 4.7 *Un opérateur symétrique est dit essentiellement auto-adjoint si sa fermeture $\overline{T}$ est auto-adjointe.*

Proposition 4.8 *Si T est un opérateur essentiellement auto-adjoint alors il possède une unique extension auto-adjointe. De plus, pour tout cœur D de T, l'opérateur $T_{|D}$ est essentiellement auto-adjoint.*

Preuve. Si $S \supset T$ est une extension auto-adjointe de T alors $S \supset T^{**} = \overline{T}$ et donc $S^* = S \subset \overline{T}^* = \overline{T}$. D'où, on obtient $S = T^{**} = \overline{T}$. De plus, on a $\overline{T_{|D}} = \overline{T}$ avec $\overline{T}$ auto-adjoint. □

Corollaire 4.9 *Soit T un opérateur symétrique. Les assertions suivantes sont équivalentes.*
(i) T est essentiellement auto-adjoint.
(ii) $Ker(T^* \pm i) = \{0\}$.
(iii) $Ran(T \pm i)$ est dense dans $\mathcal{H}$.

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème 4.4 pour $\overline{T}$. □

5 Calcul fonctionnel

5.1 Calcul fonctionnel holomorphe

Soit T un opérateur fermé à domaine dense sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Soit S une partie compacte de $\sigma(T)$ et $\mathcal{V}$ un ouvert contenant S d'intersection vide avec $\sigma(T) \setminus S$. Pour toute fonction f analytique sur $\mathcal{V}$, on pose

$$f(T) := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)(z - T)^{-1} dz \tag{6}$$

où γ est un contour fermé simple dans $\mathcal{V}$ entourant S dans le sens direct et d'intersection vide avec S. L'intégrale sur γ de $f(z)(z - T)^{-1}$ est définie comme limite de sommes de Riemann (La limite existe puisque $z \mapsto f(z)(z - T)^{-1}$ est continue sur γ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$).

Proposition 5.1 *(i) La définition (6) est indépendante du choix du contour γ.*
(ii) Pour tout $f, g \in \mathcal{O}(\mathcal{V})$, on a :

$$\begin{aligned} (f + g)(T) &= f(T) + g(T), \\ (fg)(T) &= f(T)g(T). \end{aligned}$$

Preuve. (i) Comme limite de somme de Riemann on a pour tout $x, y \in \mathcal{H}$

$$\langle x, f(T)y\rangle = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\langle x, (z-T)^{-1}y\rangle dz\,.$$

Grâce à l'holomorphe de $z \in \rho(T) \mapsto (z-T)^{-1}$, on en déduit que $f(T)$ est indépendante du choix du contour.
(ii) Soit γ_1, γ_2 deux contours dans $\mathcal{V}$ tel que γ_1 est à l'intérieur de γ_1. On a alors

$$\begin{aligned} f(T)g(T) &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} f(z)g(w)(z-T)^{-1}(w-T)^{-1}\,dzdw \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2}\frac{f(z)g(w)}{z-w}((w-T)^{-1}-(z-T)^{-1})\,dzdw \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2} f(w)g(w)(w-T)^{-1}\,dw = (fg)(T)\,. \end{aligned}$$

5.2 Calcul fonctionnel continue

Théorème 5.2 *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur normal. Alors il existe un unique $*$-morphisme de $\mathcal{C}^*$-algèbres unifères*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{C}(\sigma(T), \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) \qquad\qquad \textit{vérifiant} \\ f &\longmapsto f(T) := \Phi(f) \end{aligned}$$

$f_n(T) = T^n$ pour tout $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.
De plus on a :
(i) Si $Tx = \lambda x$, alors $f(T)x = f(\lambda)x$,
(ii) $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$,
(iii) si $f \geq 0$ alors $f(T) \geq 0$.

Preuve. On se limitera au cas T est auto-adjoint, i.e: $T^* = T$.
Existence: Pour tout polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ on doit avoir $\Phi(P) = \sum_{k=0}^n c_k T^k$ puisque Φ est un morphisme. Comme $P(T)$ est un opérateur normal, on a par [chap. 3, Thm. 2.6]

$$||P(T)|| = \sup_{\lambda\in\sigma(P(T))} |\lambda| = \sup_{x\in\sigma(T)} |P(x)|\,.$$

Les restrictions des polynômes à $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ forment une $*$-algèbre séparant les points de $\sigma(T)$ et donc dense dans $\mathcal{C}(\sigma(T), \mathbb{C})$ pour la topologie uniforme, par le Théorème de Stone-Weierstrass D.1. On peut donc étendre Φ à $\mathcal{C}(\sigma(T), \mathbb{C})$ en un $*$-morphisme isométrique.
Unicité: Découle facilement du fait que si Φ_1 et Φ_2 coïncident sur les polynômes alors leurs prolongements par continuité vont coïncider sur $\mathcal{C}(\sigma(T), \mathbb{C})$.
(i) est vraie pour les polynômes et s'étend par densité aux fonctions continues sur $\sigma(T)$.
(ii) Si $\lambda \notin f(\sigma(T))$ alors $g(z) = 1/(f(z)-\lambda) \in \mathcal{C}(\sigma(T), \mathbb{C})$ et $g(T)(f(T)-\lambda) = (f(T)-\lambda)g(T) = \mathbb{1}$. D'où, $\lambda \notin \sigma(f(T))$. Inversement, si $\lambda \notin \sigma(f(T))$ et $\lambda \in f(\sigma(T))$ alors il existe μ tel que $f(\mu) = \lambda$. On construit une suite de fonctions f_n continues sur $\sigma(T)$ telles que $||f_n|| = 1$ et $||f_n(\lambda - f)|| \underset{n}{\to} \infty$.Par conséquent, On a

$$1 = ||f_n(T)|| \leq ||f_n(T)(\lambda - f(T))||\;||(\lambda - f(T))|| \underset{n}{\to} 0\,.$$

Ce qui donne une contradiction.
(iii) Résulte de [chap. 3, Prop. 4.2]. □

5.3 Calcul fonctionnel borélien

Soit $\mathcal{B}(X)$ l'algèbre des fonctions boreliennes à values complexes et bornées sur un fermé X de $\mathbb{R}$. On dit qu'une suite $(f_n)_n$ de fonctions sur X est b-convergente vers f et on note $f_n \xrightarrow{b} f$, s'il existe $M > 0$ tel que $|f_n(x)| \leq M$ et $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in X$.

Théorème 5.3 (Théorème spectral) *Soit T un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors il existe un unique $*$-morphisme*

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathcal{B}(\sigma(T)) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ f & \longmapsto & f(T) := \Phi(f) \end{array} \qquad \text{vérifiant}$$

(i) Pour tout $z \in \rho(T)$ et $h_z(x) = (x-z)^{-1} \in \mathcal{B}(\sigma(T))$ on a $h_z(T) = (T-z)^{-1}$.
(ii) Si $(f_n)_n$ est une suite de $\mathcal{B}(\sigma(T))$ tel que $f_n \xrightarrow{b} f$ alors $f_n(T) \xrightarrow{s} f(T)$.
De plus, on a $||f(T)||_{\mathcal{L}(\mathcal{H}))} \leq \sup_{x\in\sigma(T)} |f(x)|$.

Proposition 5.4 *Soit (M, μ) un espace mesuré avec μ une mesure σ-finie. Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable μ-presque partout finie. Alors l'opérateur défini par*

$$\begin{aligned} D(T_f) &= \{\psi \in L^2(M,\mu) : f\psi \in L^2(M,\mu)\} \\ T_f\psi &= f\psi, \quad \forall \psi \in L^2(M,\mu)\,, \end{aligned}$$

est auto-adjoint et son spectre $\sigma(T_f)$ est égal à l'image essentielle de f, i.e.:

$$\sigma(T_f) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0,\, \mu(m : |f(m) - \lambda| < \varepsilon) \neq 0\}\,.$$

Preuve. Soit χ_n la suite de fonctions caractéristiques des parties $\{x \in M : |f(x)| \leq n\}$. On a $\chi_n\psi \in D(T_f)$ pour tout $\psi \in L^2(M,\mu)$ et $(\chi_n\psi)_n$ est une suite converge vers ψ dans $L^2(M,\mu)$. De plus, T_f est symétrique puisque pour tout $\varphi, \psi \in L^2(M,\mu)$

$$\langle \varphi, T_f\psi\rangle = \int_M \overline{\varphi(x)} f(x)\psi(x)\mu(dx) = \langle T_f\varphi, \psi\rangle.$$

Montrons que T_f est auto-adjoint. En effet, pour tout $\psi \in D(T_f^*)$ on a par le théorème de convergence dominé

$$\begin{aligned} ||T_f^*\psi|| = \lim_n ||\chi_n T_f^*\psi|| &= \lim_n \sup_{||\varphi||=1} |\langle \varphi, \chi_n T_f^*\psi\rangle| \\ &= \lim_n \sup_{||\varphi||=1} |\langle T_f\chi_n\varphi, \psi\rangle| \\ &= \lim_n \sup_{||\varphi||=1} |\langle \varphi, \chi_n f\psi\rangle| \\ &= \lim_n ||\chi_n f\psi||. \end{aligned}$$

D'où $f\psi \in L^2(M,\mu)$ et par conséquent $\psi \in D(T_f)$. □

Théorème 5.5 *Soit T un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert séparable. Il existe un espace mesuré (M,μ) avec μ une mesure finie, une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ presque partout finie et une transformation unitaire Θ de $\mathcal{H}$ dans $L^2(M,\mu)$ vérifiant:*
(i) $\varphi \in D(T)$ si et seulement si $\Theta(\varphi) \in D(T_f)$.
(ii) Pour tout $\psi \in D(T_f)$ on a $\Theta T_f\psi = T\Theta^{-1}\psi$.

Définition 5.6 *Soit $\mathfrak{B}_\mathbb{R}$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$. Par le calcul fonctionnel borélien (Théorème 5.3), on définit l'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{B}_\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ \Omega & \longmapsto & \chi_\Omega(T) \end{array}$$

qui à un borélien Ω de $\mathbb{R}$ associe l'opérateur $\chi_\Omega(T)$ où χ_Ω est la fonction caractéristique de Ω. On notera des fois $\chi_\Omega(T)$ par P_Ω ou aussi $\mathbb{1}_\Omega(T)$.

Proposition 5.7 *La famille $(P_\Omega))_{\Omega\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ vérifie:*
(i) P_Ω est une projection orthogonale.
(ii) $P_\emptyset = 0$ et $P_\mathbb{R} = \mathbb{1}$.
(iii) Si $\Omega = \cup_{i=0}^\infty \Omega_i$ avec les $(\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ deux à deux disjoint. Alors $\sum_{i=0}^N P_{\Omega_i} \xrightarrow{s} P_\Omega$.
(iv) $P_{\Omega_1}P_{\Omega_2} = P_{\Omega\cap\Omega_2}$.

Preuve. Ces propriétés résultent d'une application directe du calcul fonctionnel borélien (théorème 5.3). Par exemple montrons (i). Par le théorème 5.3 on a que $\Phi(\chi_\Omega^2) = \Phi(\chi_\Omega)\Phi(\chi_\Omega)$ et $\Phi(\overline{\chi_\Omega}) = \Phi(\chi_\Omega)^*$ puisque Φ est un $*$-morphisme. Comme $\chi_\Omega^2 = \chi_\Omega$ et $\overline{\chi_\Omega} = \chi_\Omega$, on obtient que $P_\Omega^2 = \chi_\Omega(T)^2 = \chi_\Omega(T) = P_\Omega$ et $P_\Omega^* = \Phi(\overline{\chi_\Omega}) = P_\Omega$. $\square$

6 Equation de Schrödinger abstraite

On veut résoudre l'équation d'évolution suivante

$$i\partial_t\psi = A\psi$$

avec A est un opérateur auto-adjoint (non-borné). Formellement, la solution est donnée par $\psi(t) = e^{-itA}\psi(0)$.

Théorème 6.1 *Soit A un opérateur auto-adjoint. On pose $U(t) = e^{itA}$, alors:*
(i) $U(0) = \mathbb{1}$ et $U(t+s) = U(t)U(s)$, $\forall t,s\in\mathbb{R}$.
(ii) $t\mapsto U(t)$ est fortement continue (i.e.: $\lim_{t\to s} U(t)\varphi = U(s)\varphi$ pour tout $\varphi\in\mathcal{H}$).
(iii) $\forall\psi\in D(A)$, $\lim_{t\to 0}\frac{U(t)-\mathbb{1}}{it}\psi$ existe.
(iv) Si $\lim_{t\to 0}\frac{U(t)-\mathbb{1}}{it}\varphi$ existe alors $\varphi\in D(A)$.

Preuve. (i) suit du calcul fonctionnel borélien.
(ii) On a par le théorème de convergence dominée

$$||e^{i(t+s)A}\varphi - e^{isA}\varphi||^2 = ||e^{itA}\varphi - \varphi||^2 = \int_\mathbb{R} |e^{it\lambda} - 1|^2\, d\mu_\varphi(\lambda) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

(iii) On a de même

$$||\frac{e^{itA}\varphi - \varphi}{it} - A\varphi||^2 = \int_\mathbb{R} |\frac{e^{it\lambda}-1}{it} - \lambda|^2\, d\mu_\varphi(\lambda) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

en utilisant le théorème de convergence dominée avec l'observation que si $\varphi\in D(A)$ alors la mesure spectrale μ_φ vérifie

$$||A\varphi||^2 = \int_\mathbb{R} |\lambda|^2\, d\mu_\varphi(\lambda) < \infty.$$

(iv) On définit l'opérateur suivant

$$D(B) = \{\varphi\in\mathcal{H} : \lim_{t\to 0}\frac{e^{itA}\varphi - \varphi}{it} \text{ existe }\}$$
$$B\varphi = \lim_{t\to 0}\frac{e^{itA}\varphi - \varphi}{it},\ \text{ pour } \varphi\in D(B).$$

On remarque que B est une extension de A grâce à (iii) puis que B est symétrique puisque

$$\langle\psi, B\varphi\rangle = \lim_{t\to 0}\langle\psi, \frac{e^{itA}\varphi - \varphi}{it}\rangle = \lim_{t\to 0}\langle\frac{e^{-itA}-\mathbb{1}}{-it}\psi, \varphi\rangle = \langle B\psi,\varphi\rangle\,,$$

pour tout $\psi,\varphi\in D(B)$. Il en résulte que $B = A$ puisque

$$B\subset B^* \quad \text{et} \quad (A\subset B \Rightarrow B^*\subset A^* = A)\,.$$

$\square$

Définition 6.2 *On dit qu'une application $t \in \mathbb{R} \mapsto U(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un C_0-groupe unitaire si :*
(i) $U(t)$ sont des opérateurs unitaires.
(ii) $U(t+s) = U(t)U(s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$.
(iii) $t \in \mathbb{R} \mapsto U(t)$ est fortement continue.

Théorème 6.3 *Soit $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ un C_0-groupe unitaire alors il existe un unique opérateur auto-adjoint A tel que $U(t) = e^{itA}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Preuve. On définit l'opérateur suivant

$$\begin{aligned} D(A) &= \{\varphi \in \mathcal{H} : \lim_{t\to 0} \frac{U(t) - \mathbb{1}}{it} \varphi \text{ existe } \} \\ A\varphi &= \lim_{t\to 0} \frac{U(t)\varphi - \varphi}{it}, \quad \forall \varphi \in D(A). \end{aligned}$$

Montrons que $D(A)$ est dense: Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$, on pose $\varphi_t = \frac{1}{t}\int_0^t U(s)\varphi\, ds$ (l'intégrale est définie comme limite de somme de Riemman d'une fonction continue $s \mapsto U(s)\varphi$ à valeurs dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$). Il suit alors que $\lim_{t\to 0} \varphi_t = \varphi$. Montrons que $\varphi_t \in D(A)$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} \frac{U(s) - \mathbb{1}}{is} \varphi_t &= \lim_{s\to 0} \frac{1}{its} \left(\int_s^{s+t} U(r)\varphi\, dr - \int_0^t U(r)\varphi\, dr \right) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{U(t) - \mathbb{1}}{it} \varphi_s = \frac{U(t) - \mathbb{1}}{it} \varphi\,. \end{aligned}$$

On en déduit que $\varphi_t \in D(A)$ et donc la densité de $D(A)$ dans $\mathcal{H}$ est prouvée.
Montrons que A est fermé: Pour tout $\varphi \in D(A)$ on a

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dt} U(t)\varphi = \lim_{s\to 0} \frac{U(t+s) - U(t)}{is} \varphi = U(t)A\varphi = AU(t)\varphi\,. \tag{7}$$

On intégrant l'identité ci-dessus, on obtient pour tout $\varphi \in D(A)$

$$U(t)\varphi = \varphi + i \int_0^t U(s)A\varphi\, ds \tag{8}$$

Donc, si $(\varphi_n)_n$ est une suite dans $D(A)$ telle que $(\varphi_n, A\varphi_n)$ converge dans $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ vers (φ, ψ) alors

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} \frac{U(s) - \mathbb{1}}{is} \varphi &= \lim_{s\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{U(s) - \mathbb{1}}{is} \varphi_n \\ &\overset{(8)}{=} \lim_{s\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s} \int_0^s U(r)A\varphi_n\, dr \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \int_0^s U(r)\psi\, dr = \psi\,. \end{aligned}$$

D'où $\varphi \in D(A)$ et $\psi = A\varphi$.
Montrons que A est symétrique: Pour tout $\psi, \varphi \in D(A)$, on a

$$\langle \psi, A\varphi \rangle = \lim_{t\to 0} \langle \psi, \frac{U(t)\varphi - \varphi}{it} \rangle = \lim_{t\to 0} \langle \frac{U(-t) - \mathbb{1}}{-it} \psi, \varphi \rangle = \langle A\psi, \varphi \rangle\,.$$

Montrons que A est auto-adjoint: Si $\psi \in Ker(A^* \pm i)$ alors $\psi \in D(A^*)$ et $A^*\psi = \mp i\psi$. On remarque que par (7) on a pour tout $\varphi \in D(A)$

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dt} \langle \psi, U(t)\varphi \rangle = \langle \psi, AU(t)\varphi \langle = \pm i \langle \psi, \varphi \rangle.$$

Il s'en suite que $g(t) = \langle \psi, U(t)\varphi \rangle$ vérifie que $g'(t) = \mp g(t)$ et donc $g(t) = e^{\mp t}\langle \psi, \varphi \rangle$. Mais comme $g(t)$ est borné puisque

$$|g(t)| = |\langle \psi, U(t)\varphi \rangle| \leq ||\psi||||\varphi||\,,$$

on en déduit que $\langle\psi,\varphi\rangle = 0$ pour tout $\varphi \in D(A)$. Ainsi on a montré que $\psi = 0$.
Enfin, on vérifie que $U(t) = e^{itA}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En effet, on a pour tout $\varphi \in D(A)$

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dt}U(t)e^{-itA}\varphi = 0\,.$$

□

Appendice

A Opérateurs dans les espaces de Banach

Les définitions et propriétés élémentaires données dans la Section 1 pour les opérateurs non-bornés sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ s'étendent immédiatement aux opérateurs non-bornés sur un espace de Banach E. Néanmoins la différence entre Hilbert et Banach apparaît avec la notion de l'adjoint.

Définition A.1 *Soit $(T, D(T))$ un opérateur à domaine dense dans un espace de Banach E. On appelle l'adjoint de T l'opérateur T' défini par*

$$D(T') = \{f \in E' : D(T) \ni x \mapsto f(Tx) \text{ est continue}\}$$

$$(T'f)(x) = f(Tx), \forall x \in D(T), \forall f \in D(T').$$

La densité de $D(T)$ dans E assure l'existence et l'unicité de l'élément $T'f \in E^*$ pour tout $f \in D(T')$.

Proposition A.2 *L'adjoint d'un opérateur à domaine dense est toujours fermé.*

Preuve. En exercice. □

Proposition A.3 *Soit $(T, D(T))$ un opérateur fermé à domaine dense. On a les relations*

$$\begin{array}{lll} Ker(T) = Ran(T')_\perp & et & Ker(T') = Ran(T)^\perp \\ \overline{Ran(T')} \subset Ker(T)^\perp & et & \overline{Ran(T)} = Ker(T')_\perp \end{array}$$

B Théorème de classe monotone

Soit X un espace topologique localement compact séparé. On note par $C_c(X)$ l'espace de toutes les fonctions à valeurs complexes continues et à support compact sur X. Soit $\mathcal{B}(X)$ l'algèbre des fonctions boréliennes à values complexes et bornées sur X. On dit qu'une suite $(f_n)_n$ de fonctions sur X est b-convergente vers f s'il existe $M > 0$ tel que $|f_n(x)| \leq M$ et $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in X$.

Théorème B.1 *Soit X un espace topologique localement compact à base dénombrable d'ouverts. Alors $\mathcal{B}(X)$ est le plus petit $\mathbb{C}$-espace vectoriel de fonctions à valeurs complexes sur X vérifiant:*
1. Stable par conjugaison.
2. Stable par b-convergence.
3. Contient $C_c(X)$.

Preuve. En exercice (on pourra utiliser le théorème de classes monotones pour les ensembles). □

C Théorème de représentation de Riesz

Une mesure borélienne μ sur un espace localement compact séparé X est dite *régulière* si
(i) Pour tout compact K de X, $\mu(K) < \infty$;
(ii) Pour tout borélien E de X,

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subseteq U, U \text{ open}\} \quad \text{et} \quad \mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E, K \text{ compact}\}.$$

Théorème C.1 *Soit X un espace localement compact séparé. Pour toute forme linéaire positive ℓ sur $C_c(X)$, il existe une unique mesure borèlienne régulière sur X telle que*

$$\ell(f) = \int_X f(x)\, d\mu(x)$$

pour tout $f \in C_c(X)$.

D Théorème de Stone-Weierstrass

Soit X un espace localement compact séparé alors $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{C})$ est une $\mathcal{C}^*$-algèbre (voir chap. 3).

Théorème D.1 *Soit X un espace localement compact séparé et S une partie de $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{C})$ qui sépare les points de X. Alors l'adhérence de la $*$-algèbre engendrée par S est ou bien égale à $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{C})$ ou bien égal à $\{f \in \mathcal{C}_0(X, \mathbb{C}) : f(x_0) = 0\}$ pour un certain $x_0 \in X$.*