$\mathcal{C}^*$-algèbres

1 Définitions et exemples

Une algèbre $\mathfrak{U}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'une loi de composition interne $(A, B) \in \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \mapsto AB \in \mathfrak{U}$, appelé loi produit, vérifiant pour tout $A, B, C \in \mathfrak{U}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:
(i) $A(BC) = (AB)C$,
(ii) $A(B + C) = AB + AC$,
(iii) $\alpha\beta(AB) = (\alpha A)(\beta B)$.
On dit que $\mathfrak{U}$ est une algèbre abèlienne si la loi produit est commutatif et on dit que $\mathfrak{U}$ est une algèbre unifère si la loi produit possède un élément neutre $\mathbb{1}$ (i.e.: $\mathbb{1}A = A\mathbb{1} = A$, $\forall A \in \mathfrak{U}$).

Définition 1.1 *Soit $\mathfrak{U}$ une algèbre. Une involution est une application $\mathfrak{U} \ni A \mapsto A^* \in \mathfrak{U}$ vérifiant pour tout $A, B \in \mathfrak{U}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:*
1. $A^{**} = A$,
2. $(AB)^* = B^*A^*$,
3. $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha}A^* + \bar{\beta}B^*$.
A^* est appelé l'adjoint de A. Une algèbre muni d'une involution est appelée une $*$-algèbre.

Une algèbre normée $\mathfrak{U}$ est une algèbre muni d'une norme $||.||$, c'est à dire une application $\mathfrak{U} \ni A \mapsto ||A|| \in \mathbb{R}_+$ vérifiant pour tout $A, B \in \mathfrak{U}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:
1. $||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$,
2. $||\lambda A|| = |\lambda|.||A||$,
3. $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$,
4. $||AB|| \leq ||A||.||B||$.
En particulier, une algèbre normée est munie d'une topologie métrisable appelée topologie uniforme. On dit que $\mathfrak{U}$ est une algèbre de Banach si $\mathfrak{U}$ une algèbre normée complète pour la topologie uniforme. Une algèbre de Banach muni d'une involution $A \mapsto A^*$ vérifiant $||A|| = ||A^*||$ est appelée une *-algèbre de Banach.

Définition 1.2 *Une $\mathcal{C}^*$-algèbre est une algèbre de Banach $\mathfrak{U}$ munie d'une involution $A \mapsto A^*$ et vérifiant pour tout $A \in \mathfrak{U}$*

$$\|A^*A\| = \|A\|^2.$$

Remarque 1.3 *Une $\mathcal{C}^*$-algèbre est une $*$-algèbre de Banach, i.e.:*

$$||A||^2 = ||A^*A|| \leq ||A^*|| \, ||A|| \, .$$

Exemples.
1. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, alors $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ muni de l'involution $A \mapsto A^*$ avec

$$(A^*x, y) = (x, Ay)$$

et de la norme $\|A\| = \sup_{||x||=1} ||Ax||$ est une $\mathcal{C}^*$-algèbre non-abèlienne.
2. Soit X un espace topologique localement compact, alors l'espace $C_0(X)$ des fonctions continues nulles à l'infini (i.e: $\forall \varepsilon > 0, \exists K$ compact, tel que $|f(x)| < \varepsilon$ pour $x \in X \setminus K$) muni de la norme sup et de l'involution $f \mapsto \bar{f}$ est une $\mathcal{C}^*$-algèbre abèlienne.

2 Résolvante, spectre et rayon spectrale

Définition 2.1 *Soit $\mathfrak{U}$ une algèbre unifère. On définit l'ensemble résolvant d'un élément $A \in \mathfrak{U}$ par*

$$\rho_{\mathfrak{U}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \mathbb{1} \textit{ inversible }\}.$$

Le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de $\rho_{\mathfrak{U}}(A)$, noté $\sigma_{\mathfrak{U}}(A)$, est appelé le spectre de A. Pour $\lambda \in \rho_{\mathfrak{U}}(A)$ l'inverse $(\lambda \mathbb{1} - A)^{-1}$ est appelé la résolvante de A en λ.

Proposition 2.2 *Soit $\mathfrak{U}$ une algèbre de Banach unifère. On a alors*
(i) $\sigma_{\mathfrak{U}}(A) \subset \bar{D}(0, ||A||) := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq ||A||\}$.
(ii) $\rho_{\mathfrak{U}}(A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Preuve. (i) Pour $\lambda > ||A||$, la série de Neumann

$$\lambda^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^k$$

est absolument convergente et donc convergente dans l'espace de Banach $\mathfrak{U}$. De plus, on vérifie en explicitant la somme que

$$(\lambda \mathbb{1} - A)\lambda^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^k = \lambda^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^k (\lambda \mathbb{1} - A) = \mathbb{1}.$$

(ii) Pour $\lambda_0 \in \rho_{\mathfrak{U}}(A)$ et λ tel que $|\lambda - \lambda_0| < ||(\lambda_0 \mathbb{1} - A)^{-1}||$, on a une série de Neumann

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k (\lambda_0 \mathbb{1} - A)^{-k-1}$$

absolument convergente donc convergente dans $\mathfrak{U}$ vers un élément B vérifiant $B(\lambda \mathbb{1} - A) = (\lambda \mathbb{1} - A)B = \mathbb{1}$. □

Proposition 2.3 *Soit A un élément d'une algèbre de Banach unifère. On définit le rayon spectral de A par*

$$r(A) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma_{\mathfrak{U}}(A)\}.$$

Alors, on a

$$r(A) = \lim_n ||A^n||^{1/n} = \inf_n ||A^n||^{1/n} \leq ||A||.$$

Par conséquent, le spectre $\sigma_{\mathfrak{U}}(A)$ est ensemble compact non-vide.

Preuve. (i) D'après la Proposition 2.2, si $\lambda \in \sigma_{\mathfrak{U}}(A)$ alors $|\lambda| \leq ||A||$. Il en résulte donc $r(A) \leq ||A||$.
(ii) Si $|\lambda|^n > ||A^n||$ pour un certain $n > 0$, alors la série

$$\lambda^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^k = \lambda^{-1} \sum_{\substack{p,r \in \mathbb{N} \\ 0 \leq r < n}}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^{np+r}$$

est absolument convergente puisque $\frac{||A^n||}{|\lambda|^n} < 1$ et elle converge vers $(\lambda \mathbb{1} - A)^{-1}$. D'où, le rayon spectral $r(A) \leq |\lambda|$ pour tout $|\lambda|^n > ||A^n||$ et par conséquent

$$r(A) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}^*} ||A^n||^{1/n} \leq \underline{\lim} ||A^n||^{1/n}.$$

(iii) La série entière ($z = 1/\lambda$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||A^k||\, z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{||A^k||}{\lambda^k}$$

a un rayon de convergence R donné par la règle de Hadamard $\frac{1}{R} = \overline{\lim} ||A^k||^{1/k}$ (i.e. pour $|\lambda| > \overline{\lim} ||A^k||^{1/k}$ la série est absolument convergente). Comme $\lambda \in \rho_{\mathfrak{U}}(A) \mapsto (\lambda \mathbb{1} - A)^{-1}$ est analytique et que $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(A)\} \subset \rho_{\mathfrak{U}}(A)$, on en déduit que $r(A) \geq \overline{\lim}_n ||A^n||^{1/n}$. □

Proposition 2.4 *Soient $\mathfrak{U}$ une algèbre unifère et $A, B \in \mathfrak{U}$. On a :*
(i) $\sigma_{\mathfrak{U}}(A^*) = \overline{\sigma_{\mathfrak{U}}(A)}$.
(ii) Si A est inversible alors $\sigma_{\mathfrak{U}}(A^{-1}) = \sigma_{\mathfrak{U}}(A)^{-1}$.
(iii) $\sigma_{\mathfrak{U}}(BA) \setminus \{0\} = \sigma_{\mathfrak{U}}(AB) \setminus \{0\}$.

Preuve. (i) Comme $(\lambda \mathbb{1} - A^*) = (\bar{\lambda}\mathbb{1} - A)^*$, on a

$$\lambda \in \rho_{\mathfrak{U}}(A^*) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \rho_{\mathfrak{U}}(A)\,.$$

(ii) A est inversible implique que $0 \notin \sigma_{\mathfrak{U}}(A)$. Pour $\lambda \neq 0$, on a $\lambda^{-1}\mathbb{1} - A^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}(A - \lambda\mathbb{1})$. D'où

$$\lambda^{-1} \in \rho_{\mathfrak{U}}(A^{-1}) \Leftrightarrow \lambda \in \rho_{\mathfrak{U}}(A)\,.$$

(iii) On a $\lambda \in \rho_{\mathfrak{U}}(AB) \setminus \{0\} \Leftrightarrow \lambda \in \rho_{\mathfrak{U}}(BA) \setminus \{0\}$ grâce à l'identité

$$(\mathbb{1} + A(\lambda\mathbb{1} - BA)^{-1}B)\,(\lambda\mathbb{1} - AB) = (\lambda\mathbb{1} - AB)\,(\mathbb{1} + A(\lambda\mathbb{1} - BA)^{-1}B) = \lambda\mathbb{1}$$

□

Définition 2.5 *On dit qu'un élément A d'une $\mathcal{C}^*$-algèbre unifère est :*
- normal si $AA^* = A^*A$.
- auto-adjoint si $A = A^*$.
- isométrique si $A^*A = \mathbb{1}$.
- unitaire si $A^*A = AA^* = \mathbb{1}$.

Théorème 2.6 *Soit $\mathfrak{U}$ une $\mathcal{C}^*$-algèbre unifère, $A \in \mathfrak{U}$ et $r(.)$ est la fonction rayon spectral.*
(i) Si A est normal alors $r(A) = ||A||$.
(ii) Si A est isométrique alors $r(A) = 1$.
(iii) Si A est unitaire alors

$$\sigma_{\mathfrak{U}}(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}.$$

(iv) Si A est auto-adjoint alors

$$\sigma_{\mathfrak{U}}(A) \subset [-||A||, ||A||].$$

(v) Pour tout polynôme P à coefficients complexes, on a

$$\sigma_{\mathfrak{U}}(P(A)) = P(\sigma_{\mathfrak{U}}(A)).$$

Preuve. (i) A est normal. On a

$$||A^{2^n}||^2 = ||\left(A^{2^n}\right)^* A^{2^n}|| = ||\,(A^*A)^{2^n}\,|| = ||A^*A||^{2^n} = ||A||^{2^{(n+1)}}\,.$$

Par conséquent, on obtient $r(A) = \lim_n ||A^{2^n}||^{1/2^n} = ||A||$.
(ii) A est isométrique. On a

$$||A^n||^2 = ||\,(A^*)^n\,A^n|| = ||\mathbb{1}|| = 1\,.$$

D'où $r(A) = \lim_n ||A^n||^{1/n} = 1$.
(iii) A est unitaire. Par la proposition 2.4, on a $\sigma_{\mathfrak{U}}(A) = \overline{\sigma_{\mathfrak{U}}(A)^{-1}}$. On en déduit que

$$\lambda \in \sigma_{\mathfrak{U}}(A) \subset \bar{D}(0,1) \Rightarrow \overline{\lambda^{-1}} \in \sigma(A) \subset \bar{D}(0,1)\,,$$

où $\bar{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$.
(iv) A est auto-adjoint. Comme $r(A) = ||A||$, $\pm i\lambda^{-1} \in \rho_{\mathfrak{U}}(A)$ si $|\lambda^{-1}| > ||A||$. On définit

$$U = (\mathbb{1} - i|\lambda|A)\,(\mathbb{1} + i|\lambda|A)^{-1}\,.$$

L'élément U est unitaire puisque par un calcul direct on montre que $U^*U = UU^* = \mathbb{1}$. On remarque d'abord l'identité suivante

$$\mathbb{1}\left(\frac{1-i|\lambda|\alpha}{1+i|\lambda|\alpha}\right) - U = \frac{2i|\lambda|}{1+i|\lambda|\alpha}\,(A-\alpha\mathbb{1})\,(\mathbb{1}+i|\lambda|A)^{-1}\,.$$

Par ailleurs, on a pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Im(\alpha) \neq 0$

$$\frac{1-i|\lambda|\alpha}{1+i|\lambda|\alpha} \notin \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}\,.$$

Il en résulte donc $Im(\alpha) \neq 0$ implique que $\alpha \in \rho_{\mathfrak{U}}(A)$.
(v) Dans une algèbre unifère si $B = A_1 \cdots A_n$ avec $A_iA_j = A_jA_i$ pour tout i, j, alors B est inversible si et seulement si chaque A_i, $i = 1, \cdots, n$, est inversible. En effet, supposons que B est inversible et qu'il existe A_{i_0} non inversible on aura

$$B^{-1}\prod_{i\neq i_0} A_i\,A_{i_0} = \mathbb{1} \quad \text{ et } \quad A_{i_0}\prod_{i\neq i_0} A_iB^{-1} = \mathbb{1}\,.$$

Ainsi, A_{i_0} est inversible à gauche et à droite et donc inversible. D'où une contradiction. Par ailleurs, si tous les A_i sont inversibles alors B est inversible.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et P un polynôme, on a

$$P(A) - \lambda\mathbb{1} = \alpha(A-\alpha_1\mathbb{1})\cdots(A-\alpha_n\mathbb{1})\,.$$

On en déduit alors que $\lambda \in \sigma_{\mathfrak{U}}(P(A))$ si et seulement si $\lambda = P(\alpha_i) \in P(\sigma_{\mathfrak{U}}(A))$ pour un certain i. □

Corollaire 2.7 *Soit $\mathfrak{U}$ une $*$-algèbre unifère et $||.||_1$, $||.||_2$ deux normes sur $\mathfrak{U}$ pour lesquelles $\mathfrak{U}$ est une $\mathcal{C}$-algèbre. Alors on a pour tout $A \in \mathfrak{U}$*

$$||A||_1 = ||A||_2\,.$$

Preuve. La définition de $r(A)$ est purement algébrique, mais par ailleurs on a montré que si $A = A^*$ alors $r(A) = ||A||_1$ et donc nécessairement on a aussi $r(A) = ||A||_2$. De plus, on a pour tout $A \in \mathfrak{U}$

$$||A||_1^2 = ||A^*A||_1 = r(A^*A) = ||A^*A||_2 = ||A||_2^2\,.$$

□

3 Eléments positifs

Dans cette section, on considère $\mathfrak{U}$ une $\mathcal{C}^*$-algèbre unifère.

Définition 3.1 *On dit qu'un élément A de $\mathfrak{U}$ est positif s'il est auto-adjoint et vérifiant la condition*

$$\sigma_{\mathfrak{U}}(A) \subset \mathbb{R}_+\,.$$

On note par $\leq$ La relation binaire définie par $A \leq B$ si et seulement si $B - A$ est positif.

Exercice. Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre partielle sur $\mathfrak{U}$.

Proposition 3.2 *(i) Un élément A auto-adjoint est positif si et seulement s'il existe B auto-adjoint tel que $A = B^2$.*
(ii) Si A est un élément positif alors il existe un unique B positif tel que $A = B^2$, que l'on note par $B = \sqrt{A}$.
(iii) Pour tout $A \in \mathfrak{U}$, l'élément A^*A est positif.

Preuve. (i)-(ii) Suivre la preuve du théorème [chap. 2, Thm. 1.16]. □

Remarque 3.3 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Un opérateur A dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est positif ([chap. 2, Déf. 1.14]) si et seulement il est positif en tant qu'élément de la $\mathcal{C}^*$-algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

Proposition 3.4 *Les assertions suivantes sont vraies.*
(i) Si $0 \leq B \leq A$ alors $||B|| \leq ||A||$.
(ii) Si $0 \leq A$ alors $A^2 \leq A||A||$.
(iii) Si $0 \leq B \leq A$ alors $0 \leq C^*BC \leq C^*AC$.
(iv) Si $0 \leq B \leq A$ et $\lambda > 0$ alors $(A+\lambda\mathbb{1})^{-1} \leq (B+\lambda\mathbb{1})^{-1}$.

Preuve. (i) A est auto-adjoint et positif donc $\sigma_{\mathfrak{U}}(A) \subset [-||A||, ||A||] \cap \mathbb{R}_+$. Ainsi, par la proposition 2.6 on voit que $\sigma_{\mathfrak{U}}(||A||\mathbb{1} - A) \subset \mathbb{R}_+$ et donc $||A||\mathbb{1} \geq A$.
(ii) On a $\sigma_{\mathfrak{U}}(A||A|| - A^2) = P(\sigma_{\mathfrak{U}}(A))$ avec $P(x) = x||A|| - x^2 \geq 0$ si $x \in \sigma_{\mathfrak{U}}(A) \subset [0, ||A||]$.
(iii) Comme $B \leq A$, il existe $D \geq 0$ tel que $A - B = D^2$. Donc, on a $C^*(A-B)C = C^*D^2C = (DC)^*DC$ est positif en utilisant la proposition 3.2.
(iv) Pour $\lambda > 0$ on a

$$\begin{aligned} B+\lambda\mathbb{1} \leq A+\lambda\mathbb{1} &\Rightarrow \mathbb{1} \leq (B+\lambda\mathbb{1})^{-1/2}(A+\lambda\mathbb{1})(B+\lambda\mathbb{1})^{-1/2} \\ &\Rightarrow (B+\lambda\mathbb{1})^{1/2}(A+\lambda\mathbb{1})^{-1}(B+\lambda\mathbb{1})^{1/2} \leq \mathbb{1} \\ &\Rightarrow (A+\lambda\mathbb{1})^{-1} \leq (B+\lambda\mathbb{1})^{-1}\,. \end{aligned}$$

□

4 Structure élémentaire

Définition 4.1 *Soient $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{U}_2$ deux $\mathcal{C}^*$-algèbres. Un $*$-morphisme entre $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{U}_2$ est une application $\pi : A \in \mathfrak{U}_1 \mapsto \pi(A) \in \mathfrak{U}_2$ vérifiant pour tout $A, B \in \mathfrak{U}_1$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$*
(i) $\pi(\alpha A + \beta B) = \alpha\pi(A) + \beta\pi(B)$,
(ii) $\pi(AB) = \pi(A)\pi(B)$,
(iii) $\pi(A^*) = \pi(A)^*$.
Si de plus π est bijective, on dit que π est un $*$-isomorphisme.

Proposition 4.2 *Soient $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{U}_2$ deux $\mathcal{C}^*$-algèbres et $\pi : \mathfrak{U}_1 \to \mathfrak{U}_2$ un $*$-morphisme. Alors:*
(i) π préserve la positiviste i.e.:

$$0 \leq A \Rightarrow 0 \leq \pi(A)\,.$$

(ii) π est continue i.e.:

$$||\pi(A)|| \leq ||A||$$

pour tout $A \in \mathfrak{U}_1$.

Preuve. (i) Si $A \geq 0$ alors il existe $B \geq 0$ tel que $A = B^2$ et donc $\pi(A) = \pi(B)^*\pi(B)$ qui est un élément positif grâce à la proposition 3.2 (iii).
(ii) Comme A^*A est un élément positif on voit, par la proposition 3.4 (ii), que $0 \leq (A^*A)^2 \leq ||A^*A||\, A^*A$. Il en résulte que

$$\pi((A^*A)^2) \quad \leq \quad ||A^*A||\pi(A^*A)\,,$$

et en utilisant Proposition 3.4(i), on en déduit que

$$||\pi(A^*A)||^2 = ||\pi(A^*A)^2|| \quad \leq \quad ||A^*A||\, ||\pi(A^*A)||\,.$$

D'où, on conclut que $||\pi(A)||^2 = ||\pi(A^*A)|| \leq ||A^*A|| = ||A||^2$. □

La structure élémentaire des $\mathcal{C}^*$-algèbres est décrite par les deux théorèmes suivants.

Théorème 4.3 *Si $\mathfrak{U}$ une $\mathcal{C}^*$-algèbre alors $\mathfrak{U}$ est $*$-isomorphe à une $\mathcal{C}^*$-sous algèbre de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ pour un certain espace de Hilbert $\mathcal{H}$.*

Théorème 4.4 *Soit $\mathfrak{U}$ une $\mathcal{C}^*$-algèbre abèlienne. Il existe un espace X localement compact tel que $\mathfrak{U}$ est $*$-isomorphe à $C_0(X)$.*