Analyse fonctionnelle: Pré-requis

1 Espace vectoriel normé

Dans ce cours $\mathbb{K}$ désigne le corps de nombres réels $\mathbb{R}$ ou complexes $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 *Une norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application $||.|| : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant:*

(i) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(ii) $||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x||, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$.

(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \ \forall x, y \in E$.

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une norme $||.||$ est appelé un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé ou simplement un espace normé.

En particulier, $(E, ||.||)$ est un espace métrique lorsqu'il est muni de la distance

$$E \times E \ni (x, y) \mapsto d(x, y) := ||x - y||.$$

Cette distance induit naturellement une structure topologique sur $(E, ||.||)$ à la quelle on fera implicitement référence dans toute la suite sauf mention contraire.

On notera la boule ouverte centrée en x et de rayon $r > 0$ par

$$B(x, r) := \{y \in E : ||x - y|| < r\}.$$

Soit $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ deux espaces normés. Une application linéaire $T : E \to F$ est dite *bornée* s'il existe une constante $c > 0$ tel que pour tout $x \in E$

$$||T(x)||_F \leq c \, ||x||_E .$$

Dans le cas où $F = \mathbb{K}$ on parlera de *forme linéaire bornée.*

Théorème 1.2 *Soit T une application linéaire entre deux espaces vectoriel normés. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) T est continue en un point.

(ii) T est continue.

(iii) T est borné.

Preuve. $(iii) \Rightarrow (ii)$: Si $(x_n)_n$ est une suite convergente vers $x \in E_1$, alors $\lim_n T(x_n) = T(x)$ puisque $||T(x_n - x)|| \leq c||x_n - x||$.
$(ii) \Rightarrow (i)$: évident.
$(i) \Rightarrow (iii)$: T est continue en x_0 est équivalent à dire

$$\forall r > 0, \exists \eta > 0 : y \in B(x_0, \eta) \Rightarrow Ty \in B(Tx_0, r).$$

En prennent $r = 1$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $||x_0 - y|| < \eta_1 \Rightarrow ||T(x_0 - y)|| < 1$. Pour tout $z \in E$, $z \neq 0$, on a $||T(\frac{\eta_1 z}{2||z||})|| < 1$ en choisissant $y = x_0 + \frac{\eta_1 z}{2||z||}$. D'où, l'inégalité $||T(z)|| \leq \frac{2}{\eta_1} ||z||$ pour tout $z \in E$. $\square$

Notation. On notera l'espace vectoriel des toutes les applications linéaires continues entre deux espaces normés E et F par $\mathcal{L}(E, F)$. Si $E = F$, on notera $\mathcal{L}(E, F)$ simplement par $\mathcal{L}(E)$ et si $F = \mathbb{K}$ on notera $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, le dual topologique de E, simplement par E^*.

Proposition 1.3 *Soit $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ deux espaces normés. L'application définie pour tout $T \in \mathcal{L}(E, F)$ par*

$$||T|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Tx||_F}{||x||_E}$$

est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$.

Preuve. En exercice. $\square$

Notation. Pour $T \in \mathcal{L}(E, F)$, on note l'image de T par $Ran(T) := \{Tx, x \in E\}$ et le noyau de T par $Ker(T) := \{x \in E : Tx = 0\}$.

Exercice. 1) Montrer qu'une forme linéaire f sur un espace normé est continue si et seulement si $Ker(f)$ est un fermé de E.
2) Soient f, g deux forme linéaires bornées sur un espace normé. Montrer que si $Ker(f) = Ker(g)$ alors $f = \lambda g$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition 1.4 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors*
(i) Toute les normes sur E sont équivalentes.
(ii) Pour toute norme $||.||$ sur E, les compacts de $(E, ||.||)$ sont les fermés bornés.

Preuve. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille libre totale sur E. Soit $||.||_0$ la norme sur E définie par

$$||\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i||_0 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, .$$

(i) Si $||.||$ est une norme sur E alors

$$||x|| \leq \max(||e_1||, \cdots, ||e_n||) \, ||x||_0 \, .$$

On considère $\mathbb{K}^n$ muni de sa topologie usuelle. La fonction $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$, $f(\lambda_1, \cdots \lambda_n) = ||\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i||$ est clairement continue. Puisque $D := \{(\lambda_1, \cdots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = 1\}$ est un compact $f(D)$ l'est aussi. En remarquant que $0 \notin f(D)$ on en déduit qu'il existe $c > 0$ tel que $\inf f(D) \geq c$. Ceci implique que

$$0 < c \leq \inf\{||x|| : ||x||_0 = 1\} \, .$$

D'où l'inégalité $c||x||_0 \leq ||x||$ pour tout $x \in E$.
(ii) Il résulte de (i) que toutes les normes induisent sur E la même topologie ainsi que les mêmes ensembles bornés. Il suffit donc de montrer (ii) pour E muni de la norme $||.||_0$. Pour toute norme $||.||$ sur $\mathbb{K}^n$, l'application

$$\begin{array}{rcl} g : (E, ||.||_0) & \rightarrow & (\mathbb{K}^n, ||.||), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i & \mapsto & (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \end{array}$$

est continue ainsi que son inverse. On en déduit donc que K est un compact (respectivement fermé borné) de E si et seulement si $g(K)$ est un compact (respectivement fermé borné) de $\mathbb{K}^n$. Comme les compacts de $\mathbb{K}^n$ sont les fermés bornés alors le résultat (ii) est prouvé. $\square$

Lemme 1.5 (Riesz) *Soit X un sous-espace propre fermé d'un espace vectoriel normé E. Pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$ il existe un x_ε tel que $||x_\varepsilon|| = 1$ et $||x - x_\varepsilon|| > \varepsilon$ pour tout $x \in X$.*

Preuve. Soit $z \in E \setminus X$ et $d = \inf_{x \in X} ||z - x||$. Puisque X est fermé, $d > 0$. Soit $\varepsilon \in (0, 1)$, alors pour un certain $x_0 \in X$

$$d \leq ||z - x_0|| < \frac{d}{\varepsilon} \, .$$

Montrons que

$$x_\varepsilon = \frac{z - x_0}{||z - x_0||}$$

possède la propriété énoncée. En effet, pour $x \in X$ on a

$$\begin{aligned} ||x_\varepsilon - x|| &= \frac{1}{||z - x_0||} \left\| z - \underbrace{x_0 - ||z - x_0|| x}_{\in X} \right\| \\ &\geq \frac{1}{||z - x_0||} d > \varepsilon \, . \end{aligned}$$

□

Théorème 1.6 *Un espace vectoriel normé E est de dimension finie si et seulement si la fermeture de sa boule unité est un compact.*

Preuve. Si E est de dimension infini, en utilisant le Lemme 1.5, on construit par récurrence une suite $(x_n)_n$ dans $\overline{B(0,1)}$ tel que $||x_n|| = 1$ et $||x_m - x_n|| \geq 1/2$ pour tout $n \neq m$. Clairement, la suite $(x_n)_n$ n'admet aucune sous-suite convergente. Donc $\overline{B(0,1)}$ n'est pas compact.
Si E est de dimension finie alors $\overline{B(0,1)}$ est une partie fermé borné de E. Donc $\overline{B(0,1)}$ est un compact par la Proposition 1.4 . □

Théorème 1.7 (Hahn-Banach) *Soit X un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et p une fonction réelle convexe définie sur X. Soit Y un sous-espace vectoriel de X, et f une forme linéaire sur Y vérifiant $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in Y$. Il existe alors un prolongement de f en une forme linéaire g sur l'espace X, vérifiant $g(x) \leq p(x)$ en tout point de X.*

Preuve. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des prolongements linéaires g de f sur un sous-espace de X contenant Y tel que $g(x) \leq p(x)$. Supposons que $\mathcal{E}$ est non vide et utilisons le Lemme A.1 de Zorn pour montrer le théorème. On considère la relation d'ordre partielle sur $\mathcal{E}$ tel que $g_1 \prec g_2$ si g_2 est défini sur un sous-espace contenant celui de g_1 sur lequel on $g_1(x) = g_2(x)$. Soit $\{g_i\}_{i \in I}$ un sous-ensemble de $\mathcal{E}$ totalement ordonné où chaque g_i est défini sur un sous-espace $Y_i \supset Y$. L'application g définie sur le sous-espace $\cup_{i \in I} Y_i$ par $g(x) = g_i(x)$ si $x \in Y_i$ est un majorant de $\{g_i\}_{i \in I}$. D'où l'existence d'un élément maximal dans $\mathcal{E}$.
Il reste à vérifier que $\mathcal{E}$ est non vide. Pour $z \in X, z \notin Y$, on peut prolonger f au sous-espace $Y + z\mathbb{R}$ en posant

$$\tilde{f}(\alpha z + y) = \alpha \tilde{f}(z) + f(y) \, .$$

L'application $\tilde{f}$ est clairement linéaire. De plus, si on montre que

$$r := \inf_{y \in Y, \alpha > 0} \frac{1}{\alpha} [p(\alpha z + y) - f(y)] \geq s := \sup_{y \in Y, \alpha > 0} \frac{1}{\alpha} [f(y) - p(-\alpha z + y)] \, , \tag{1}$$

alors en choisissant $s \leq \tilde{f}(z) \leq r$ on aura

$$\tilde{f}(\alpha z + y) \leq p(\alpha z + y), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall y \in Y.$$

Montrons (1). Pour tout $\alpha, \beta > 0$ et $y_1, y_2 \in Y$, on a

$$\begin{aligned} f(\beta y_1 + \alpha y_2) &= (\alpha + \beta) f(\frac{\beta}{(\alpha + \beta)} y_1 + \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)} y_2) \\ &\leq (\alpha + \beta) p(\frac{\beta}{(\alpha + \beta)} (y_1 - \alpha z) + \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)} (y_2 + \beta z)) \\ &\leq \beta p(y_1 - \alpha z) + \alpha p(y_2 + \beta z) \, . \end{aligned}$$

Ceci implique que pour tout $\alpha, \beta > 0$ et $y_1, y_2 \in Y$ on a

$$\frac{1}{\alpha}[f(y_1) - p(y_1 - \alpha z)] \leq \frac{1}{\beta}[p(y_2 + \beta z) - f(y_2)].$$

Il en résulte (1). On en déduit d'une part que $\mathcal{E}$ est non vide et d'autre part que l'élément maximal de E est défini sur l'espace X entier. $\square$

Corollaire 1.8 *Soit f une forme linéaire continue définie sur un sous-espace Y d'un espace normé X. Alors il existe une forme linéaire continue g sur X vérifiant*

(a) *$f(y) = g(y)$ pour tout $y \in Y$,*

(b) $||f|| = ||g||$.

Preuve. On applique le Théorème 1.7 avec $p(x) = ||f||.||x||$. $\square$

Une conséquence importante du Théorème de Hahn-Banach est que E^* sépare les points de E.

Définition 1.9 *On dit qu'une suite $(x_n)_n$ dans un espace normé E converge faiblement vers $x \in E$ si pour tout $f \in E^*$ on a $\lim_n f(x_n) = f(x)$. On note cette convergence par $x_n \rightharpoonup x$.*
On parle de convergence forte quand on a convergence en norme (i.e: $||x_n - x|| \to_n 0$) et on note par $x_n \to x$.

La limite faible x d'une suite $(x_n)_n$ est unique grâce au Corollaire 1.8, puisque

$$(\ell(x) = 0, \forall \ell \in E^*) \Rightarrow x = 0.$$

Théorème 1.10 *Dans un espace normé, toute suite faiblement convergente est bornée.*

Preuve. Soit E un espace normé et $(x_n)_n$ une suite faiblement convergente. On appliquant Corollaire B.7 pour $S = E^*$ et la suite de fonctions $g_n : f \ni E^* \mapsto f(x_n)$. Il existe alors une boule $B(f_0, r)$, $r > 0$ dans E^* et $M > 0$ tel que

$$|f(x_n)| \leq M, \quad \forall f \in B(f_0, r), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $f \in E^*$, $f \neq 0$, on a $g = f_0 + \frac{rf}{2||f||} \in B(f_0, r)$. Ainsi, on a pour tout $f \in E^*$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |f(x_n)| &\leq 2/r[||f_0(x_n)|| + M]||f|| \\ &\leq c||f|| \end{aligned}$$

pour un certain $c > 0$. D'après le Corollaire 1.8, il existe pour chaque n un $f \in E^*$ tel que $||f|| = 1$ et $f(x_n) = ||x_n||$. Il en résulte que $||x_n|| \leq c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Exercice. Montrer que si $x_n \rightharpoonup x$ alors $||x|| \leq \underline{\lim}||x_n||$.

2 Espaces de Banach

Définition 2.1 *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.*

Exemples. Soit (M, μ) un espace mesuré. Pour tout $p \geq 1$, $L^p(M, \mu)$ est un espace de Banach.

Théorème 2.2 *Soit X un espace normé et Y un espace de Banach. L'espace des applications linéaires continues $\mathcal{L}(X, Y)$ muni de la norme*

$$||T|| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{||T(x)||}{||x||} \tag{2}$$

est un espace de Banach.

Preuve. Il est claire que (2) définit une norme sur $\mathcal{L}(X,Y)$. Soit $(T_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(X,Y)$. Pour tout $x \in X$, la suite $(T_n x)_n$ est de Cauchy puisque

$$||T_n(x) - T_m(x)|| \leq ||T_n - T_m|| \ \ ||x|| \to_{n,m\to\infty} 0 \,.$$

Comme Y est complet, la suite $T_n(x)$ est convergente. On définit alors l'application $T : X \to Y$, $T(x) = \lim_n T_n(x)$ et on remarque que T est linéaire. Une suite de Cauchy dans un espace normé est bornée. Comme

$$||T_n(x)|| \leq ||T_n|| \, ||x||$$

pour tout n, on en déduit que $||T(x)|| \leq \sup_n ||T_n|| \, ||x||$ et donc $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. De même, on a pour tout $n, m \in \mathbb{N}$

$$||T_n(x) - T(x)|| \leq ||T_n - T_m|| \, ||x|| + ||T_m(x) - T(x)|| \,.$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $m, n > N \Rightarrow ||T_n - T_m|| < \varepsilon/2$. D'un autre coté, pour tout $x \in X$ il existe $N_x \in \mathbb{N}$ tel que $m > N_x \Rightarrow ||T_m(x) - T(x)|| < \varepsilon/2||x||$. D'où pour tout $x \in X$, $n > N \Rightarrow ||T_n(x) - T(x)|| \leq \varepsilon||x||$. On en déduit donc que $\lim_n T_n = T$ dans $\mathcal{L}(X,Y)$. □

Théorème 2.3 *Un espace vectoriel normé est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente de cet espace est convergente.*

Preuve. En exercice. □

Théorème 2.4 (Banach-Steinhaus) *Soit E un espace de Banach et F un espace normé. On considère une famille $(T_i)_{i\in I}$ d'applications linéaires continues de E dans F. Si la famille $(T_i)_{i\in I}$ est ponctuellement bornée, i.e:*

$$\forall x \in E, \quad \sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < +\infty \,.$$

alors elle est uniformément bornée, i.e:

$$\exists C > 0 : \quad \forall i \in I, \|T_i\| \leq C \,.$$

Preuve. Soit

$$B_n := \{x : ||T_i x|| \leq n\} = \cap_{i\in I} T_i^{-1}(\overline{B(0,n)}) \,.$$

Chaque B_n est un fermé de E. Par ailleurs, $E = \cup_{n\in N^*} B_n$ et donc d'après le Théorème B.4 de Baire il existe un B_{n_0} d'intérieur non vide. Ceci implique l'existence de $y \in E$ et $r > 0$ tel que

$$B(y,r) \subset T_i^{-1}(\overline{B(0,n_0)}), \quad \forall i \in I \,.$$

Comme pour tout $x \in E, x \neq 0$, $\frac{rx}{2||x||} + y \in B(y,r)$, on a que $||T_i(\frac{rx}{2||x||} + y)|| \leq n_0$ puis

$$||T_i(x)|| \leq 2/r(n_0 + ||T_i y||) \, ||x||, \quad \forall i \in I, \forall x \in E \,.$$

Puisque $||T_i y||$ est borné, on en déduit que la famille $(T_i)_{i\in I}$ est uniformément bornée. □

Exercice. Soient X, Y deux Banach. On considère $B : X \times Y \to \mathbb{C}$ une application telle que $x \mapsto B(x,z)$ et $y \mapsto B(w,y)$ soient des formes (anti-)linéaires continues pour tout $z \in Y$ et $w \in X$. Montrer que B est une application continue.

Théorème 2.5 *Soit X un espace de Banach. Pour tout $x \in X$ on note $\hat{x}$ la forme linéaire continue sur X^* définie par $X^* \ni \ell \mapsto \ell(x)$. Alors l'application linéaire*

$$\begin{array}{rcl} J : X & \longrightarrow & X^{**} \\ x & \mapsto & \hat{x} \end{array}$$

est une isométrie (i.e: $||\hat{x}||_{X^{**}} = ||x||_X$, pour tout $x \in X$). Lorsque de plus J est surjective, on dit que X est un espace de Banach réflexif.

Preuve. Comme on a pour tout $x \in X$ et $\ell \in X^*$

$$|\hat{x}(\ell)| \leq ||x||_X \; ||\ell||_{X^*},$$

on en déduit que $\hat{x} \in X^{**}$ et $||\hat{x}||_{X^{**}} \leq ||x||_X$. Pour chaque $x \in X$, en utilisant le Corollaire 1.8, on montre qu'il existe $\ell_0 \in X^*$ tel que $||\ell_0|| = 1$ et $\ell_0(x) = ||x||$. D'où, on

$$||\hat{x}||_{X^{**}} \geq \frac{|\ell_0(x)|}{||\ell_0||_{X^*}} = ||x||_X \,.$$

□

Théorème 2.6 (Banach-Schauder) *Soient E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire continue de E vers F. Si T est surjective, alors T est ouverte, i.e. l'image de tout ouvert de E par T est un ouvert de F.*

Preuve. Grâce à la linéarité de T, on se limitera a montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, B_F(0, \eta) \subset T(B_E(0, \varepsilon))$$

De plus par homogénéité de T, il suffit de le faire pour un seul ε (par exemple $\varepsilon = 1$). On considère les fermés suivants

$$F_n = \overline{T(B_E(0, n))}$$

Comme T est surjective, on a

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

Par le Théorème B.4 de Baire, un de ces fermés F_{n_0} est d'intérieur non vide. Il contient donc une boule $B(y, r)$, $r > 0$. Ainsi, par homogénéité de T il existe $\eta > 0$ tel que :

$$B_F(0, \eta) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}$$

Montrons que $B_F(0, \eta) \subset T(B_E(0, 2))$. Soit $y \in \overline{T(B_E(0, 1))}$, il existe alors $x_1 \in B_E(0, 1)$ tel que $y - Tx_1 \in B_F(0, \eta/2) \subset \overline{T(B_F(0, 1/2))}$. De même il existe $x_2 \in B(0, 1/2)$ tel que $y - Tx_1 - Tx_2 \in B(0, \eta/4) \subset \overline{B_F(0, 1/4)}$. Par récurrence, on construit alors une suite $(x_n)_n$ vérifiant pour tout n

$$x_n \in B(0, 1/2^{n-1}) \quad \text{et} \quad y - \sum_{i=1}^{n} Tx_i \in B(0, \eta/2^n).$$

En particulier, la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ est absolument convergente. Puisque E est un espace de Banach, cette série converge D'après Théorème 2.3. Comme on a $|| \sum_{n=1}^{\infty} x_n|| < 2$ et $y = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n$, on en déduit que

$$y = T\Big(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\Big) \in T(B_E(0, 2))\,.$$

□

Définition 2.7 *Soit T une application définit d'un ensemble X à valeurs dans un autre ensemble Y. Le graphe de T, noté $\Gamma(T)$, est la partie de $X \times Y$ définit par*

$$\Gamma(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}\,.$$

Théorème 2.8 (Graphe fermé) *Soient E, F deux espaces de Banach et T une application linéaire de E dans F. Alors T est continue si et seulement si le graphe de T est une partie fermée de $E \times F$.*

Preuve. Supposons que $\Gamma(T)$ est fermé. Comme $E \times F$ est un Banach et que $\Gamma(T)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $E \times F$, $\Gamma(T)$ est lui-même un Banach. Considérons les projections $p_1 : \Gamma(T) \to E$ et $p_2 : \Gamma(T) \to F$ définies par

$$p_1(x, y) = x \quad \text{et} \quad p_2(x, y) = y\,.$$

Ce sont des applications linéaires continues, et p_1 est bijective, donc p_1^{-1} est continue par le Théorème 2.6. D'où, $T = p_2 \circ p_1^{-1}$ est continue par composition. □

2.1 Orthogonalité

Soient E un espace de Banach, M une partie de E et N une partie de E^*. On définit l'orthogonale de M et N comme étant les sous-espaces suivants

$$M^\perp = \{f \in E' : f(x) = 0, \forall x \in M\} \subset E^*$$
$$N_\perp = \{x \in E : f(x) = 0, \forall f \in N\} \subset E.$$

Proposition 2.9 *Soient E un espace de Banach, M un sous-espace de E et N un sous-espace de E^*. Alors, on a les relations*

$$(M^\perp)_\perp = \overline{M} \quad \text{ et } \quad (N_\perp)^\perp \supset \overline{N}$$

Preuve. On montre facilement que $M \subset (M^\perp)_\perp$ puisque pour $f \in M^\perp$, on a $f(x) = 0$ pour tout $x \in M$. Supposons qu'il existe $x_0 \in (M^\perp)_\perp$ tel que $x_0 \notin \overline{M}$ alors par le Théorème de Hahn-Banach (version géométrique) il existe $f \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant:

$$f(x) < \alpha < f(x_0), \quad \forall x \in \overline{M}\,.$$

On en déduit de là que $f(x) = 0$ pour tout $x \in M$. En effet, si $f(x) \neq 0$ alors $(f(\lambda x))_{\lambda \in \mathbb{R}}$ ne peut être majoré. Ainsi on voit que $f \in M^\perp$ et que $f(x_0) = 0$. Ceci nous conduit à l'absurdité $0 < \alpha < 0$. □

Remarque 2.10 *Si E est un espace de Banach réflexif alors on a de plus $(N_\perp)^\perp = \overline{N}$. Ceci se démontre en suivant les mêmes lignes de la preuve ci-dessus.*

2.2 Topologie faible

Soit E un espace de Banach.

Définition 2.11 *La topologie faible sur E, notée $\sigma(E, E^*)$, est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les formes linéaires dans E^*.*
Un système fondamental de voisinage de la topologie $\sigma(E, E^*)$ en un point $x_0 \in E$ est donnée par

$$V^{x_0}_{\varepsilon,I} := \{x \in E : |f_i(x - x_0)| < \varepsilon, \forall i \in I\} \quad \text{où } \varepsilon > 0, I \text{ fini }, f_i \in E^*.$$

On note une suite $(x_n)_n$ qui converge vers x pour la topologie $\sigma(E, E^*)$ par $x_n \rightharpoonup x$. On alors les propriétés suivantes:

1. $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow f(x_n) \to f(x), \quad \forall f \in E^*$.
2. $x_n \to x \Leftrightarrow x_n \rightharpoonup x$.
3. $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow ||x_n||$ est bornée.
4. $x_n \rightharpoonup x$ et $f_n \to f$ dans E^* alors $f_n(x_n) \to f(x)$.

Remarque 2.12
1) Un ouvert (resp. fermé) de la topologie faible est un ouvert (resp. fermé) de la topologie forte.
2) La sphère n'est pas faiblement fermée et son adhérence pour la topologie faible est $\bar{B}(0, 1)$.
3) $B(0, 1)$ n'est pas un ouvert de la topologie faible et son intérieur pour $\sigma(E, E^*)$ est vide.
4) La topologie faible n'est pas métrisable.

2.3 Topologie faible*

Soit E un espace de Banach.

Définition 2.13 *La topologie faible* sur E^*, notée $\sigma(E^*, E)$, est la topologie la moins fine sur E^* rendant continues toutes les applications*

$$\begin{aligned} \hat{x} : E^* &\to \mathbb{C}, \\ f &\mapsto f(x), \end{aligned}$$

pour tout $x \in E$. Un système fondamental de voisinage de la topologie $\sigma(E^*, E)$ en un point $f_0 \in E^*$ est donnée par

$$V_{\varepsilon,I}^{f_0} := \{f \in E : |f - f_0(x_i)| < \varepsilon, \forall i \in I\} \quad \text{où } \varepsilon > 0, I \text{ fini }, x_i \in E.$$

On note une suite $(f_n)_n$ qui converge vers f pour la topologie $\sigma(E^*, E)$ par $x_n \overset{w}{\rightharpoonup} x$. On alors les propriétés suivantes:

1. $f_n \overset{w}{\rightharpoonup} f \Leftrightarrow f_n(x) \to f(x), \quad \forall x \in E$.
2. $f_n \to f \Leftrightarrow f_n \overset{w}{\rightharpoonup} f$.
3. $f_n \overset{w}{\rightharpoonup} f \Rightarrow ||f_n||$ est bornée dans E^*.
4. $f_n \rightharpoonup f$ et $x_n \to x$ dans E alors $f_n(x_n) \to f(x)$.

Théorème 2.14 (Banach-Alaoglu) *La boule fermé de E^* est compact pour la topologie $\sigma(E^*, E)$.*

3 Géométrie des espaces Hilbertiens

3.1 Produit scalaire

Soient E et F deux $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Une application $f : E \to F$ est dite *anti-linéaire* si elle vérifie

$$f(\alpha x + y) = \bar{\alpha} f(x) + f(y)\,; \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x, y \in E.$$

Définition 3.1 *Un produit scalaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est une application $(.,.) : E \times E \to \mathbb{K}$ vérifiant:*
(i) L'application $E \ni y \mapsto (x, y)$ est linéaire pour tout $x \in E$.
(ii) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, $\forall x, y \in E$.
(iii) $(x, x) \geq 0$, $\forall x \in E$ et $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Remarque 3.2 *Les points (i) et (ii), quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, impliquent que l'application $E \ni x \mapsto (x, y)$ est anti-linéaire pour tout $y \in E$.*

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est souvent appelé $\mathbb{K}$-espace *préhilbertien.* On montrera par la suite que

$$||x|| = \sqrt{(x, x)}$$

définit une norme sur E. C'est par l'intermédiaire de cette norme que le produit scalaire induit une topologie sur E.

Théorème 3.3 (Pythagore) *Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$ vérifiant $||x_i|| = 1$ et $(x_i, x_j) = 0$ si $i \neq j$, pour tout $i, j = 1, \cdots, n$. On a pour tout $x \in E$, l'identité*

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x_i, x)|^2 + ||x - \sum_{i=1}^{n} (x_i, x) x_i||^2$$

Preuve. On remarque d'abord que pour y et z quelconques dans E vérifiant $(y, z) = 0$, on a grâce aux propriétés du produit scalaire la relation

$$||y + z||^2 = (y + z, y + z) = ||z||^2 + ||y||^2 \,. \tag{3}$$

Par un calcul direct, on vérifie que

$$\left(x - \sum_{i=1}^{n} (x_i, x) x_i , \sum_{i=1}^{n} (x_i, x) x_i \right) = 0 \,.$$

En utilisant (3), il suit alors que

$$\begin{aligned} ||x - \sum_{i=1}^{n} (x_i, x) x_i + \sum_{i=1}^{n} (x_i, x) x_i||^2 &= ||x - \sum_{i=1}^{n} (x_i, x) x_i||^2 + ||\sum_{i=1}^{n} (x_i, x) x_i||^2 \\ &= ||x - \sum_{i=1}^{n} (x_i, x) x_i||^2 + \sum_{i=1}^{n} |(x_i, x)|^2 \,. \end{aligned}$$

□

Deux conséquences de l'identité de Pythagore sont:
L'inégalité de Bessel

$$||x||^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |(x_i, x)|^2 \,,$$

pour tout $x \in E$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$ vérifiant les hypothèses du Théorème 3.3.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(x, y)| \leq ||x|| \,.\, ||y||, \ \ \forall x, y \in E \,.$$

Preuve. Si $y = 0$ l'identité est vraie. Sinon, par l'inégalité de Bessel (avec $n = 1$ et $x_1 = y/||y||$) on a

$$|(x, y/||y||)|^2 \leq ||x||^2 \,.$$

D'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

Théorème 3.4 *Le $\mathbb{K}$-espace préhilbertien $(E, (.,.))$ muni de la fonctionnelle $E \ni x \mapsto ||x|| = \sqrt{(x, x)}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.*

Preuve. On vérifie aisément que:
(i) $||x|| = 0 \Leftrightarrow (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(ii) $||\lambda x|| = \sqrt{|\lambda|^2 (x, x)} = |\lambda| \; ||x||, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$.
(iii) En utilisant Cauchy-Schwarz on montre l'inégalité triangulaire:

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + 2Re(x, y) + ||y||^2 \leq (||x|| + ||y||)^2.$$

□

On dit que $||.||$ est la norme associée au produit scalaire $(.,.)$ sur E.

En particulier, un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien est un espace métrique. Sauf mention contraire, la structure topologique sur un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien est celle induite naturellement par la norme associe à son produit scalaire.

Exercice.
1) Montrer que sur un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien E, on a l'identité du parallélogramme

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2, \ \ \forall x, y \in E \,. \tag{4}$$

2) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé vérifiant (4). Montrer que sa norme est associée à un produit scalaire sur E.

Exercice.
1) Montrer, sur un $\mathbb{C}$-espace préhilbertien, l'identité de polarisation

$$(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k ||x + i^k y||^2 . \tag{5}$$

2) Trouver une formule équivalente pour un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien.

3.2 Espace de Hilbert

Définition 3.5 *Un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert est un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien complet relativement à la norme associé à son produit scalaire. Quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on parle simplement d'un espace de Hilbert.*

Exemples.
1) Si (M, μ) un espace mesuré, alors $L^2(M, \mu)$ avec $(f, g) = \int_M \overline{f(t)} g(t)\, d\mu(t)$ est un espace de Hilbert.
2) Un sous-espace fermé d'un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert est un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert.

Exercice.
Trouver un exemple d'un espace préhilbertien qui n'est pas un espace de Hilbert.

Somme directe:
Soit $(\mathcal{H}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'espace hilbertien. L'ensemble

$$\mathcal{H} := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \times_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_i : \sum_{i=0}^{\infty} ||x_i||^2_{\mathcal{H}_i} < \infty\}$$

est un sous espace vectoriel du produit cartésien $\times_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_i$. Lorsque $\mathcal{H}$ est équipé du produit scalaire

$$\langle (x_i), (y_i) \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} (x_i, y_i)_{\mathcal{H}_i}$$

il devient un espace de Hilbert appelé somme directe des $(\mathcal{H}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et noté

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}_i.$$

Produit tensoriel:

Proposition 3.6 *Le complété d'un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien est un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert.*

Preuve. En exercice. □

Soit $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert. Pour tout $x_1 \in \mathcal{H}_1$ et $x_2 \in \mathcal{H}_2$, on définit l'application suivante

$$\begin{array}{rcl} x_1 \otimes x_2 : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (y_1, y_2) & \longmapsto & (y_1, x_1)_{\mathcal{H}_1} \, (y_2, x_2)_{\mathcal{H}_2} \end{array}$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ des toutes les combinaisons linéaires finies des applications $x_1 \otimes x_2$, $x_i \in \mathcal{H}_i, i = 1, 2$ forme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel que l'on munit d'un produit scalaire défini par

$$(x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2) := (x_1, y_1)(x_2, y_2), \tag{6}$$

et s'étendant à tout les vecteurs de $\mathcal{E}$ par linéarité.

Proposition 3.7 *L'application $(.,.)$ définie par (6) est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.*

Preuve. Essentiellement, il faut montrer que $(.,.)$ est indépendante de la représentation des vecteurs de $\mathcal{E}$. $\square$

Grâce à la Proposition 3.7 on en déduit que le complété de l'espace préhilbertien $(E,(.,.))$ est un espace de Hilbert.

Définition 3.8 *On appelle le produit tensoriel de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$, noté $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, l'espace de Hilbert obtenu en complétant l'espace préhilbertien $(\mathcal{E},(.,.))$.*

Isomorphisme d'espaces de Hilbert:

Définition 3.9 *On dit que deux $\mathbb{K}$-espace de Hilbert $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont isomorphes s'il existe une application linéaire bijective T de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$ telle que*

$$(T(x),T(y))_{\mathcal{H}_2} = (x,y)_{\mathcal{H}_1}$$

pour tout $x,y \in \mathcal{H}_1$. On dit que l'application T est un isomorphisme d'espaces de Hilbert.

Exercice. Soit (M,μ) et (N,ν) deux espaces mesurés. Montrer l'existence d'un unique isomorphisme T d'espace de Hilbert entre $L^2(M,\mu) \otimes L^2(N,\nu)$ et $L^2(M \times N, \mu \otimes \nu)$ vérifiant

$$T(f \otimes g)(x,y) = f(x)g(y)\ .$$

3.3 Projection orthogonale

Lemme 3.10 *Soit $\mathcal{H}$ un Hilbert et M un ensemble convexe fermé de $\mathcal{H}$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$ il existe un unique vecteur $z \in \mathcal{H}$ tel que*

$$\inf_{y\in M} ||x-y|| = ||x-z||\,.$$

Preuve. Soit $x \in \mathcal{H}$, il existe alors une suite notée $(z_n)_n$ dans M vérifiant

$$\lim_n ||x-z_n|| = \inf_{y\in M} ||x-y||\,. \tag{7}$$

Soit (y_n) une suite dans M vérifiant aussi (7). On a

$$\begin{aligned} ||z_n-y_m||^2 &= ||z_n-x+x-y_m||^2 \\ &= 2||z_n-x||^2+2||y_m-x||^2-||z_n+y_m-2x||^2 \\ &\leq 2||z_n-x||^2+2||y_m-x||^2-4(\inf_{y\in M}||x-y||)^2 \longrightarrow_{n,m\to\infty} 0 \end{aligned}$$

En particulier, pour $y_n = z_n$ on voit que $(z_n)_n$ est une suite de Cauchy dans un Hilbert, donc elle convergent vers un $z \in M$ puisque M est fermé. De plus, grâce à (7) on a

$$||x-z|| = \inf_{y\in M} ||x-y||\,.$$

Soit $z' \in M$ vérifiant

$$\inf_{y\in M} ||x-y|| = ||x-z'||\,.$$

L'inégalité ci-dessus avec $y_n = z'$ implique que $z = z'$, d'où l'unicité. $\square$

Dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ on définit l'orthogonale d'un sous-ensemble S par

$$S^\perp := \{x \in \mathcal{H} : (x,y) = 0, \forall y \in S\}\,.$$

On montre facilement que $S^\perp$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$.

Théorème 3.11 (projection orthogonale) *Soit $\mathcal{H}$ un Hilbert et M un sous espace fermé de $\mathcal{H}$. Alors M et $M^\perp$ sont deux sous-espaces supplémentaires (i.e: pour tout $x \in \mathcal{H}$ il existe un unique couple $(z,w) \in M \times M^\perp$ tel que $x = z + w$).*

Preuve. Soit $x \in \mathcal{H}$, il existe selon le Lemme 3.10 un unique vecteur $z \in M$ tel que $||x - z|| = \inf_{y \in M} ||x - y||$. Notons $x - z$ par $w \in \mathcal{H}$ et $||x - z||$ par d. Pour tout $y \in M$ on a

$$\begin{aligned} d^2 = ||x - z||^2 &\leq ||x - (z + \lambda y)||^2 = ||w - \lambda y||^2 \\ &= d^2 - 2Re[\lambda(w, y)] + |\lambda|^2 ||y||^2 \,. \end{aligned}$$

Donc, $-2Re[\lambda(w, y)] + |\lambda|^2||y||^2 \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $y \in M$. En particulier, pour tout $y \in M$ on voit que $Re(w, y) = 0$ en prenant $\lambda = t, t \in \mathbb{R}$ et que $Im(w, y) = 0$ en prenant $\lambda = it, t \in \mathbb{R}$. □

Théorème 3.12 (Riesz) *Pour toute forme linéaire continue T sur $\mathcal{H}$ (i.e. $T \in \mathcal{H}^*$), il existe un unique vecteur $x \in \mathcal{H}$ vérifiant $T(y) = (x, y)$ pour tout $y \in \mathcal{H}$. De plus, on a*

$$\sup_{y \neq 0} \frac{|T(y)|}{||y||} = ||x|| \,.$$

Preuve. Unicité: supposons que $T(y) = (x, y) = (x', y)$ pour tout $y \in \mathcal{H}$, alors $(x - x', y) = 0$ et donc $x = x'$.
Existence: Soit $M = Ker(T)$. Si $M = \mathcal{H}$, on obtient immédiatement que $T(y) = (0, y)$ pour tout $y \in H$. Sinon, par le Théorème de la projection orthogonale il existe un vecteur non nul $u \in M^\perp$. Pour tout $y \in \mathcal{H}$, on a

$$y = \underbrace{(y - \frac{T(y)}{T(u)} u)}_{\in M} + \underbrace{\frac{T(y)}{T(u)} u}_{\in M^\perp} \,.$$

En prenant $x = \frac{\overline{T(u)}}{||u||^2} u$, on vérifie que pour tout $y \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} (x, y) &= \frac{T(u)}{||u||^2} \left(u, y - \frac{T(y)}{T(u)} u \right) + \frac{T(u)}{||u||^2} \left(u, \frac{T(y)}{T(u)} u \right) \\ &= T(y) \,. \end{aligned}$$

Finalement, grâce à Cauchy-Schwarz on a

$$||x|| = \sup_{y \neq 0} \frac{|(x, y)|}{||y||} \leq ||x|| \,.$$

□

Remarque 3.13 *Le théorème de Riesz fournit une autre preuve du Corollaire 1.8 dans le cas où l'espace vectoriel normé est un Hilbert.*

Preuve. Soit f une forme linéaire continue définie sur un sous-espace E d'un Hilbert $\mathcal{H}$. Si E est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ alors E est lui-même un espace de Hilbert. Par le Théorème 3.12 de Riesz il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x) = (x_0, x)$ pour tout $x \in E$. Il suffit donc de prendre $g(x) = (x_0, x)$, pour tout $x \in \mathcal{H}$.
Si E n'est pas fermé alors la forme linéaire f s'étend par continuité à une forme linéaire $\tilde{f}$ continue sur $\overline{E}$. L'argument ci-dessus fournit un $g \in \mathcal{H}^*$ vérifiant (a) et (b). □

3.4 Bases orthonormés

Soit $\mathcal{H}$ un Hilbert. Une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs dans $\mathcal{H}$ est dite orthonormée si $||x|| = 1$ pour tout $x \in \mathcal{F}$ et $(x, y) = 0$ pour tout $x, y \in \mathcal{F}$, $x \neq y$.

Définition 3.14 *Une base orthonormée (BON) d'un espace de Hilbert est un élément maximal de l'ensemble de toutes les familles orthonormées de l'espace de Hilbert ordonné par inclusion.*

Théorème 3.15 *Tout $\mathbb{K}$-espace de Hilbert admet une base orthonormée.*

Preuve. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble de toute les familles orthonormées dans $\mathcal{H}$ ordonnées par inclusion. Montrons que $\mathcal{C}$ est un ensemble inductif. En effet, tout sous-ensemble de $\mathcal{C}$ totalement ordonné $(F_i)_{i\in I}$ admet un majorant qui est $\cup_{i\in I} F_i \in \mathcal{C}$. L'existence d'une BON résulte donc de Lemme A.1 de Zorn. □

Théorème 3.16 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $(e_i)_{i\in I}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}$. Alors:*
1) La famille $(e_i)_{i\in I}$ est complète (i.e: $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\{e_i, i \in I\}$ est dense dans $\mathcal{H}$).
2) Pour tout $x \in \mathcal{H}$ on a

$$||x||^2 = \sum_{i\in I} |(e_i, x)|^2$$

où l'ensemble des termes non nuls de la somme sur I est au plus dénombrable.

Preuve. Remarquons d'abord que s'il existe $x \in \mathcal{H}$ tel que $(e_i, x) = 0$ pour tout $i \in I$ alors $x = 0$. En effet, dans le cas contraire $\{e_i, i \in I\} \cup \{x/||x||\}$ est une famille orthonormée dans $\mathcal{H}$ ce qui est en contradiction avec le fait que $\{e_i, i \in I\}$ est une BON.
Soit $x \in \mathcal{H}$ et $D = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\{e_i, i \in I\}$. D'après l'inégalité de Bessel, pour tout $J \subset I$ fini

$$\sum_{i\in J} |(e_i, x)|^2 \leq ||x||^2 .$$

Donc $I_0 := \{i : (e_i, x) \neq 0\}$ est au plus dénombrable et on peut donc l'ordonner comme étant la suite $(i_k)_k$. On observe que la suite $(\sum_{k=0}^n |(e_{i_k}, x)|^2)_n$ est croissante majorée donc convergente. Soit $z_n := \sum_{k=0}^n (e_{i_k}, x)e_{i_k}$, on a (pour $n < m$)

$$||z_n - z_m||^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |(e_{i_k}, x)|^2 \to_{n,m\to\infty} 0.$$

Donc $(z_n)_n$ converge dans $\mathcal{H}$ vers un certain $z \in \overline{D}$. On vérifie facilement

$$(x - z, e_{i_r}) = \lim_n (x - \sum_{k=0}^{n} (e_{i_k}, x)e_{i_k}, e_{i_r}) = 0,$$
$$(x - z, e_j) = \lim_n (x - \sum_{k=0}^{n} (e_{i_k}, x)e_{i_k}, e_j) = 0 , \quad \forall j \in I_0^c .$$

D'où $(x - z, e_i) = 0$ pour tout $i \in I$ et donc $x = z \in \overline{D}$. Ceci montre (1).
Maintenant, en utilisant le Théorème de Pythagore on a

$$\begin{aligned} ||x||^2 &= \lim_n ||x - \sum_{k=0}^{n} (e_{i_k}, x)e_{i_k}||^2 + \sum_{k=0}^{n} |(e_{i_k}, x)|^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |(e_{i_k}, x)|^2 = \sum_{i\in I} |(e_{i_k}, x)|^2 . \end{aligned}$$

□

Un espace topologique est dit *séparable* s'il admet un sous-ensemble dénombrable dense.

Théorème 3.17 *Un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert est séparable si et seulement si il admet une base orthonormée au plus dénombrable.*

Preuve. Supposons que $\mathcal{H}$ est séparable. Soient D une partie dénombrable dense dans $\mathcal{H}$ et $(e_i)_{i\in I}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}$. On a

$$||e_i - e_j|| = \sqrt{2}, \forall i \neq j .$$

D'où $B(e_i, \sqrt{2}) \cap B(e_j, \sqrt{2}) = \emptyset$ pour tout $i \neq j$. Puisque D est dense, chaque boule $B(e_i, \sqrt{2})$ contient au moins un élément de D. Donc I est au plus dénombrable.
Supposons maintenant que $\mathcal{H}$ admet une BON dénombrable $(e_n)_n$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ est similaire), l'ensemble

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i : \lambda_i \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

est dénombrable puisque c'est une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables. S est dense dans $\mathcal{H}$ en utilisant le Théorème 3.16. □

Remarque 3.18 *Remarquons que au cours de la preuve ci-dessus on a montré que toute BON d'un espace de Hilbert séparable est au plus dénombrable.*

Exercice. Montrer que $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ est un espace de Hilbert séparable.

Exemples. Soit $C_b(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ muni de la norme sup. On note par $A(\mathbb{R})$ la fermeture de l'espace des polynômes trigonométriques dans $C_b(\mathbb{R})$ (appelé algèbre de fonction presque périodiques). On munit $A(\mathbb{R})$ du produit scalaire

$$(f, g) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} \overline{f(t)} g(t) dt \,.$$

Le complété de $A(\mathbb{R})$ relativement à ce produit scalaire fournit un exemple d'espace de Hilbert non-séparable puisque $\{e^{it\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est une base orthonormée.

3.5 Convergence et compacité faible

Grâce au Théorème 3.12 de Riesz, la convergence faible (Définition1.9) se formule plus simplement dans un espace de Hilbert. Une suite $(x_n)_n$ dans un Hilbert $\mathcal{H}$ est faiblement convergente vers $x \in \mathcal{H}$ si et seulement si

$$\lim_n (x_n, y) = (x, y), \quad \forall y \in \mathcal{H} \,.$$

De même on dit qu'une suite $(x_n)_n$ est faiblement bornée si pour chaque $y \in \mathcal{H}$ la suite scalaire $((x_n, y))_n$ est bornée.

Théorème 3.19 *Une suite est faiblement bornée si et seulement si elle est bornée.*

Preuve. On fournit ici une preuve alternative au Théorème 1.10. Soit $(x_n)_n$ une suite faiblement bornée. Supposons qu'elle ne est pas bornée. Puisque $\sup_{y \in B(0,1)} |(x_n, y)| = ||x_n||$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ et $y_1 \in B(0, 1)$ tel que $|(x_{n_1}, y_1)| > 1$. Par continuité de l'application $y \mapsto (x_{n_1}, y)$ il existe $0 < r_1 < 1$ tel que $|(x_{n_1}, y)| > 1$ pour tout $y \in B(y_1, r_1) \subset B(0, 1)$. De même on vérifie que $\sup_{y \in B(y_1, r_1)} |(x_n, y)| \geq r_1 ||x_n|| - |(x_n, y_1)|$. D'où par le même raisonnement il existe $n_2 > n_1$ et $y_2 \in B(y_1, r_1)$ tel que $|(x_{n_2}, y_2)| > 2$ puis il existe aussi $0 < r_2 < 1/2$ tel que $|(x_{n_2}, y)| > 2$ pour tout $y \in \overline{B(y_2, r_2)} \subset B(y_1, r_1)$. Par itération on obtient les suites $(x_{n_k})_k$, $(y_k)_k$ et $(r_k)_k$ vérifiant $0 < r_k < 1/k$, $y_k \in B(y_{k-1}, r_{k-1})$ et $|(x_{n_k}, y)| > k$ pour tout $y \in \overline{B(y_k, r_k)} \subset B(y_{k-1}, r_{k-1})$. En particulier, on a

$$||y_k - y_{k'}|| < \max(1/k, 1/k') \to_{k,k' \to \infty} 0 \,,$$

et donc la suite $(y_k)_k$ est convergent vers un $y \in \mathcal{H}$. De plus, on a $y \in \overline{\{y_n, n \geq k+1\}} \subset \overline{B(y_{k+1}, r_{k+1})} \subset B(y_k, r_k)$. On en déduit alors que $|(x_{n_k}, y)| > k$ pour tout k. Donc, la suite $(x_n)_n$ n'est pas faiblement bornée. □

Proposition 3.20 *Si $(x_n)_n$ est une suite bornée dans $\mathcal{H}$ et D est une partie dense dans $\mathcal{H}$, alors $\lim_n (x_n, y) = (x, y)$, $\forall y \in D$ si et seulement si $(x_n)_n$ converge faiblement vers x.*

Preuve. Soit $M > 0$ tel que $||x_n|| \leq M$ et $||x|| \leq M$. Pour tout $y \in \mathcal{H}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $z \in D$ tel que $||y - z|| < \varepsilon/3M$. Par l'inégalité triangulaire puis par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\begin{aligned} |(x_n - x, y)| &\leq |(x_n, y - z)| + |(x_n - x, z)| + |(x, y - z)| \\ &< 2\varepsilon/3 + |(x_n - x, z)|\,. \end{aligned}$$

Comme $z \in D$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|(x_n - x, z)| < \varepsilon/3$ pour tout $n > N$. D'où la convergence faible de x_n vers x. □

Théorème 3.21 *Soit $\mathcal{H}$ un $\mathbb{K}$-espace Hilbert séparable. Si $(x_n)_n$ est une suite bornée dans $\mathcal{H}$ alors elle admet une sous-suite faiblement convergente.*

Preuve. D'après le Théorème 3.17, $\mathcal{H}$ admet une base orthonormée dénombrable $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. La suite (x_n, e_1) est bornée. Il existe une sous-suite $(x_{\varphi_1(n)})_n$ tel que $(x_{\varphi_1(n)}, e_1)$ converge. De même pour tout $k > 1$ entier, il existe une sous-suite $(x_{\varphi_k(n)})_n$ tel que $((x_{\varphi_k(n)}, e_k))_n$ est convergente. Par procédé diagonale $(x_{\varphi_n(n)})_n$ est une sous-suite de $(x_n)_n$ vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$(x_{\varphi_n(n)}, e_k) \quad \text{converge quand} \quad n \to \infty\,.$$

Soit D l'espace vectoriel (algébrique) engendré par $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. D est dense dans $\mathcal{H}$. Par linéarité on obtient que $((x_{\varphi_n(n)}, y))_n$ est une suite convergente pour tout $y \in D$. On définit alors l'application $f : D \to \mathbb{K}$ par $f(y) = \lim_n (x_{\varphi_n(n)}, y)$. On voit facilement que f est une forme linéaire sur D vérifiant

$$|f(y)| \leq \sup_n ||x_n||\, ||y||\,.$$

D'où f est une forme linéaire continue sur D et d'après Corollaire 1.8 elle admet un prolongement en une forme linéaire continue g sur $\mathcal{H}$. En utilisant le Théorème 3.12 de Riesz, il existe un unique $x \in \mathcal{H}$ tel que $g(y) = (x, y)$. En utilisant Proposition 3.20, on en déduit que $x_{\varphi_n(n)}$ est faiblement convergente vers x. □

Remarque 3.22 *Le Théorème ci-dessus dit que toute partie bornée dans un Hilbert séparable est relativement séquentiellement faiblement compact. Ce résultat reste vrai sur tout espace de Banach réflexif séparable.*

Proposition 3.23 *Soit $(x_n)_n$ une suite dans $\mathcal{H}$ convergeant faiblement vers $x \in \mathcal{H}$. Alors cette convergence est forte si et seulement si :*

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\| \tag{8}$$

Preuve. La condition (8) est évidemment nécessaire.
Supposons (8). Alors:

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}(x_n, x)$$

Par convergence faible de $(x_n)_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} 2\mathrm{Re}(x_n, x) = 2\|x\|^2$$

et donc par (8) $(x_n)_n$ tend vers x dans $\mathcal{H}$. □

Exercice. Montrer que si $x_n \to x$ et $y_n \rightharpoonup y$ alors $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

Appendice

A Lemme de Zorn

Un ensemble ordonné tel que tout sous-ensemble totalement ordonné possède un majorant est souvent appelé ensemble inductivement ordonné.

Lemme A.1 (Zorn) *Tout ensemble inductivement ordonné non vide admet au moins un élément maximal.*

B Topologie

Soit X un ensemble et $\mathcal{O}$ un sous-ensemble des parties de X, (i.e: $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$). On dit que $(X, \mathcal{O})$ est un *espace topologique* si $\mathcal{O}$ vérifie:
1. L'ensemble vide et X appartiennent à $\mathcal{O}$.
2. $\mathcal{O}$ est stable par réunion quelconque.
3. $\mathcal{O}$ est stable par intersection finie.
L'ensemble $\mathcal{O}$ est alors appelé une *topologie* sur X et les éléments de $\mathcal{O}$ sont appelés les *ouverts* de $(X, \mathcal{O})$. Les complémentaires dans X des éléments de $\mathcal{O}$ sont appelés les *fermés* de $(X, \mathcal{O})$. Si $A \subset X$, l'*intérieur* de A, noté $\overset{\circ}{A}$, est le plus grand ouvert contenu dans A et l'*adhérence*, noté $\bar{A}$, est le plus petit fermé contenant A. Soit A, B deux parties de X, on dit que A est dense dans B si $A \subset B$ et $B \subset \overline{A}$. Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est *séparable* s'il contient un ensemble dénombrable dense dans X. On dit que $(X, \mathcal{O})$ est *connexe* s'il n'est pas la réunion de deux ouverts non-vides disjoints.

B.1 Filtre

Soit X un ensemble. Un ensemble $\mathfrak{F}$ de parties de X est un filtre si:
1. $\mathfrak{F}$ est non-vide et $\emptyset \notin \mathfrak{F}$.
2. Si $A \in \mathfrak{F}$ et $A \subset B \subset X$ alors $B \in \mathfrak{F}$.
3. Si $A, B \in \mathfrak{F}$ alors $A \cap B \in \mathfrak{F}$.
Un ensemble $\mathfrak{B}$ de parties de X est une *base de filtre* si:
1. $\mathfrak{B}$ est non-vide et $\emptyset \notin \mathfrak{B}$.
2. Si $A, B \in \mathfrak{B}$ alors il existe $C \in \mathfrak{B}$ tel que $C \subset A \cap B$.
Toute base de filtre $\mathfrak{B}$ engendre un unique filtre $\mathfrak{F}$ tel que $A \in \mathfrak{F}$ si et seulement s'il existe $B \in \mathfrak{B}$ vérifiant $B \subset A$. L'ensemble de tout les filtres sur X est inductivement ordonné par la relation d'inclusion. On dit que $\mathfrak{F}_1$ est plus fin que $\mathfrak{F}_2$ si on a $\mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}_1$. Tout filtre sur X qui est maximale pour cette relation d'ordre est appelé *ultrafiltre* sur X. D'après le Lemme A.1 de Zorn, tout filtre $\mathfrak{F}$ sur X est inclus dans un ultrafiltre.

Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. Un sous-ensemble U de $(X, \mathcal{O})$ est un *voisinage* d'un point $x \in X$ si $x \in \overset{\circ}{U}$. L'ensemble de tout les voisinages d'un point $x \in X$ est un filtre. On appelle *système fondamentale de voisinages* d'un point $x \in X$ toute base de filtre engendrant le filtre de tout les voisinages de x.

B.2 Suite généralisée

Un ensemble ordonné est dit *filtrant croissant* si toute partie finie admet un majorant.
Soit X un espace topologique. Une suite généralisée de X est une fonction d'un ensemble filtrant croissant à valeurs dans X. On écrit souvent une suite généralisée sous la forme $(x_i)_{i \in I}$ où $(I, \leq)$ est un ensemble filtrant croissant donné.

Soient $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_j)_{j \in J}$ deux suites généralisées. On dit que $(y_j)_{j \in J}$ est une sous suite généralisée de $(x_i)_{i \in I}$ si

$$\forall s \in I, \exists r \in J : \{y_j, j \geq r\} \subset \{x_i, i \geq s\}.$$

Définition B.1 *On dit qu'une suite généralisée $(x_i)_{i\in I}$ converge vers x dans un espace topologique X si pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de x il existe $\alpha \in I$ telle que*

$$\alpha \leq i \Rightarrow x_i \in \mathcal{V}.$$

Dans ce cas, on note $\lim_{i\in I} x_i = x$.

On remarque qu'on a unicité de la limite si X est un espace séparé. Dans un espace topologique quelconque la notion de convergence des suites généralisées caractérise la topologie.

Proposition B.2
- Une fonction $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques est continue en un point x si et seulement si pour toute suite généralisée $(x_i)_{i\in I}$ tel que $\lim_{i\in I} x_i = x$ on a $\lim_{i\in I} f(x_i) = f(x)$.
- Un sous-ensemble A de X est fermé si et seulement si $(x_i)_{i\in I}$ convergent vers un x alors $x \in A$.
- Si $A \subset X$, alors $x \in \bar{A}$ si et seulement s'il existe une suite généralisée $(x_i)_{i\in I}$ convergente vers x.
- Une suite généralisée $(x_i)_{i\in I}$ possède une limite si et seulement si toute sous-suite généralisée de $(x_i)_{i\in I}$ possède une limite.

Théorème B.3 (Bolzano-Weierstrass) *Un espace X est compact si et seulement si toute suite généralisée $(x_i)_{i\in I}$ admet une sous-suite généralisée convergente.*

Si X est un espace topologique vérifiant le premier axiome de dénombrabilité (i.e: tout point possède un système fondamental de voisinage dénombrable) alors les résultats ci-dessus sont aussi vrais pour les suites.

B.3 Théorème de Baire

On dit qu'un sous-ensemble d'un espace topologique est *rare (ou nulle part dense)* si son adhérence est d'intérieur vide.

Théorème B.4 (Baire) *Un espace métrique complet n'est jamais une réunion dénombrable de sous-ensembles rares.*

Preuve. Supposons que S est un espace métrique complet vérifiant $S = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ où chaque A_n un sous-ensemble rare de S. Il existe alors $x_1 \notin \overline{A_1}$ et $0 < r_1 < 1$ tel que $B(x_1, r_1) \cap A_1 = \emptyset$. De même, il existe $x_2 \in B(x_1, r_1) \setminus \overline{A_2}$ et $0 < r_2 < 1/2$ tel que $\overline{B(x_2, r_2)} \subset B(x_1, r_1), B(x_2, r_2) \cap A_2 = \emptyset$. Par récurrence, on construit une suite $(x_n)_n$ et $(r_n)_n$ vérifiant $x_n \in B(x_{n-1}, r_{n-1}) \setminus \overline{A_n}$, $0 < r_n < 1/2^{n-1}$, $\overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_{n-1}, r_{n-1})$ et $B(x_n, r_n) \cap A_n = \emptyset$. On remarque que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy, donc converge vers un certain $x \in S$. D'un autre coté,

$$x_m \in \overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_{n-1}, r_{n-1})$$

pour tout $m \geq n$ et $\overline{B(x_{n-1}, r_{n-1})} \cap A_{n-1} = \emptyset$. D'où, on a $x \in B(x_{n-1}, r_{n-1})$ et $x \notin A_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$. Ceci contredit $S = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. □

Remarque B.5 *Le théorème ci-dessus est aussi vrai pour tout espace topologique localement compact.*

Théorème B.6 (Uniform Boundedness Principle) *Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions continues sur un espace métrique complet S à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si pour tout $x \in S$, il existe $m(x) > 0$ tel que pour tout $i \in I$ on a $|f_i(x)| \leq m(x)$, alors il existe un ouvert O non vide de S et une constante $M > 0$ tel que $|f_i(x)| \leq M$ pour tout $x \in O$ et $i \in I$.*

Preuve. Pour tout entier m, on définit

$$U_{m,i} := \{x \in S : |f_i(x)| \leq m\} \quad \text{et } U_m := \cap_{i\in I} U_{m,i}\,.$$

Puisque les f_i sont continues les $U_{m,i}$ et les U_m sont fermés. Par hypothèse, on $S = \cup_{m\in\mathbb{N}} U_m$ et donc en utilisant le Théorème B.4 de Baire, on en déduit que un des U_m est d'intérieur non vide. D'où l'existence d'un ouvert non vide O et de $M > 0$ tel qu'on ait $|f_i(x)| \leq M$ pour tout $i \in I$ et $x \in O$. □

Corollaire B.7 *Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions à valeurs complexes uniformément continues sur un espace métrique S. Si pour tout $x \in S$, il existe $m(x) > 0$ tel que pour tout $i \in I$ on a $|f_i(x)| \leq m(x)$, alors il existe un ouvert O non vide de S et une constante $M > 0$ tel que $|f_i(x)| \leq M$ pour tout $x \in O$ et $i \in I$.*

Preuve. Les fonctions f_i s'étendent par continuité au complété de S. Il existe alors par le théorème ci-dessus un ouvert non vide O du complété de S sur lequel la propriété de borne uniforme est vraie. on obtient alors le résultat par restriction sur S. $\square$