Université de Rennes 1
Institut de Mathématique de Rennes

L3 2011-2012
TopM

Feuille 6 : *Complétude*

Exercice 6.1. Soit $E = \{a_i, i \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable, on définit $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ par

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad d(a_i, a_i) = 0$$
$$\forall i \neq j \quad d(a_i, a_j) = \delta + \tfrac{1}{i+1} + \tfrac{1}{j+1}\,.$$

Montrer que c'est une distance si $\delta \geq 0$; (E, d) est-il complet ?

Exercice 6.2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) (X, d) est complet
(ii) Pour toute suite décroissante $(A_n)_n$ de parties fermées non vides de X dont le diamètre tend vers 0, l'intersection des A_n est non vide.

Exercice 6.3. On désigne par l^∞ l'espace vectoriel des suites bornées de nombres réels. Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de l^∞, on pose

$$N_\infty(x) = \sup_n |x_n|$$

a) Montrer que N_∞ est une norme sur l^∞.
b) Soit $(x^{(k)})_k$ une suite de Cauchy dans l'espace l^∞. On notera $x^{(k)} = (x^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$.
Montrer que pour chaque n la suite $(x_n^{(k)})_k$ est une suite de Cauchy de nombres réels. On notera y_n la limite de cette suite.
c) Montrer que la suite $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
d) Montrer enfin que la suite $(x^{(k)})_k$ converge vers y dans l^∞. Qu'a-t-on montré ?

Exercice 6.4. Montrer que le dual topologique E' d'un espace vectoriel normé $(E, || \ ||_E)$ sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni de la norme

$$||f|| = \sup_{||x||_E = 1} |f(x)|$$

est un espace de Banach.
Plus généralement si $(E, || \ ||_E)$ un espace vectoriel normé et si $(F, || \ ||_F)$ est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la norme

$$|||T||| = \sup_{||x||_E = 1} ||T(x)||_F$$

est un espace de Banach.

Exercice 6.5. Soient $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et f une fonctions continues de $[a, b]$ dans lui-même.

a) Montrer que f possède au moins un point fixe. b) On suppose que f est un homéomorphisme de $[a,b]$ sur lui-même. Montrer que, ou bien $f(a) = a$ et $f(b) = b$, ou bien $f(a) = b$ et $f(b) = a$.

Exercice 6.6. Soit E un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, x \neq y \Longrightarrow d(f(x), f(y)) < d(x,y)$$

Montrer qu'il existe un point $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 6.7. Soient $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé et X une partie compacte convexe non vide de E. Soit $f : X \to X$ telle que $\forall x, y \in E, ||f(x) - f(y)|| \leq ||x - y||$. Montrer que f admet au moins un point fixe dans X.