UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Equations différentielles

F6 : Transformation de Laplace

Exercice 1

Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

$$f(t) = t^n, \qquad g(t) = e^{at}, \qquad h(t) = te^{at}, \qquad j(t) = \sin(at), \qquad k(t) = \cos(at).$$

Exercice 2

On considère l'équation différentielle

$$(\star) \quad y'' + 2y' + y = te^t\,, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0\,.$$

1. Déterminer la transformée de Laplace de la solution de l'équation différentielle $(\star)$.
2. En déduire, par transformée de Laplace inverse, la solution explicite de $(\star)$.

Exercice 3

Résoudre, en utilisant la transformation de Laplace, les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
y' + 2y &= x^2 & \qquad & y(0) = 2\\
y' - 3y &= e^{-2x}x & & y(0) = 1\\
y'' + 2y' - 3y &= e^{-2x} & & y'(0) = 0, y(0) = 0\\
y'' - y' - 2y &= 1 + e^{-x} & & y'(0) = 0, y(0) = 0\\
y'' + 2y' + 5y &= \cos 2x & & y'(0) = 0, y(0) = 0\\
y'' + 4y &= 2x + \sin x & & y'(0) = 0, y(0) = 0
\end{aligned}$$

Exercice 4

Résoudre, par la transformation de Laplace, les équations suivantes :

$$\begin{array}{cc}
y^{(4)} - 2y'' + y = e^{2x} & \qquad y''' - 2y'' + y' = x\\
y^{(3)}(0) = \dots = y(0) = 0 & \qquad y''(0) = y'(0) = 0, y(0) = 1
\end{array}$$

Exercice 5

Résoudre, par la transformation de Laplace, les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{ccc}
x'' & = & 2x' + y + 1\\
y' & = & -x' - 2y\\
x(0) & = 1, & x'(0) = 0, \; y(0) = 1
\end{array}\right. \qquad
\left\{\begin{array}{ccc}
x' & = & 2x - y\\
y' & = & -x + 3y\\
x(0) & = & y(0) = 1
\end{array}\right.$$