UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Equations différentielles

F5 : Equations différentielles du second ordre

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes

$$y'' + y' - 2y = 0 \qquad y'' + 2y' + 5y = 0 \qquad y'' + 2y' + y = 0 \qquad y'' - 4y = 0 \qquad y'' + 4y' = 0$$

Exercice 2

On considère les deux équations différentielles suivantes

$$(\star) \quad ay'' + by' + cy = 0 \qquad (\star\star) \quad ay'' + by' + cy = f(x)$$

ou f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
1. Montrer que l'ensemble des solutions de $(\star)$ est un sous-espace vectoriel de dim 2.
2. Montrer que la différence de deux solutions de $(\star\star)$ est une solution de $(\star)$.
3. En déduire que toute solution de $(\star\star)$ est la somme d'une solution de $(\star)$ et d'une solution particulière de $(\star\star)$.

Exercice 3

Soit l'équation différentielle

$$(\star) \quad y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$$

1. Vérifier que $y_0(x) = x^2e^{-x}$ est une solution de $(\star)$.
2. Résoudre l'équation $(\star)$.
3. Déterminer la solution de $(\star)$ vérifiant $y(0) = 3$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 4

En cherchant des solutions particulières, résoudre les équations suivantes

$$\begin{aligned}
y'' + y' + 2y &= 2x^2 - x + 3 & \qquad y'' + 2y' &= x^2 - 4x + 3 \\
y'' - y' - 6y &= e^{-2x}(x^2 - x + 1) & y'' - 4y' + 4y &= e^{2x}(x^2 - x) \\
y'' + 2y' - 3y &= e^{-2x} & y'' + y' + y &= e^x \\
y'' - y' - 2y &= 3e^{-x} & y'' + 3y' - 4y &= e^x \\
y'' + 2y' + 5y &= \cos 2x + 2\sin 2x & y'' + 4y &= \cos 2x \\
y'' + 4y &= 8x(2\cos 2x - \sin 2x) & y'' + 4y &= 9x(\sin x - 2\cos x)
\end{aligned}$$

Exercice 5

En se ramenant à des systèmes, résoudre les équations suivantes

$$y^{(4)} - 2y'' + y = e^{2x} \qquad\qquad y''' - 2y'' + y' = x$$
$$y'' + y' + 2y = \cos^2 x \qquad\qquad y'' - 2y' + y = \cos(x)$$

Exercice 6

Réduire le problème suivant à un système du premier ordre, puis résoudre ce dernier :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'' & = & 2x' + 5y + 3 \\ y' & = & -x' - 2y \end{array} \right.$$