UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Intégrale de fonctions de la variable réelle

TD5 : Intégrales généralisées

Exercice 1

Déterminer la nature des intégrales suivantes et les calculer lorsqu'elles convergent :

$$\int_0^1 \ln(x)\,dx \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \int_0^1 \frac{x}{(x-1)^2}\,dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \tan(x)\,dx \qquad \int_0^1 \frac{e^x}{x}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{x\,dx}{(x+1)^2\sqrt{1-x^4}}$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx \qquad \int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^2}\,dx \qquad \int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^\alpha}\,dx \qquad \int_1^\infty \frac{1}{\ln(x)}\,dx \qquad \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}\,dx \qquad \int_{-\infty}^\infty e^{-x}\,dx \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x} - \arctan(\frac{1}{x})\,dx$$

Exercice 2

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^\infty \sin x \sin\frac{1}{x}\,dx \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,dx, \alpha > 0 \qquad \int_{2/\pi}^\infty \ln(\cos\frac{1}{x})\,dx \qquad \int_{2/\pi}^\infty \ln(\sin\frac{1}{x})\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin x}\,dx \qquad \int_0^\infty \frac{1}{\sin x^\alpha}\,dx, \alpha > 0 \qquad \int_0^\infty \frac{x}{1+x}e^{-x}\,dx$$

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-ax}\,dx, \alpha >, a > 0 \qquad \int_0^1 \frac{1-e^x+a\sin x}{x^2}\,dx, a > 0 \qquad \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

Exercice 3

On suppose que f et g sont deux fonctions strictement positives sur $[a,\infty[$ et que $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ diverge. Montrer qu'au moins une des deux intégrales

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx \quad \text{et} \quad \int_a^\infty g(x)f(x)dx$$

diverge.

Exercice 4

Prouver que l'intégrale impropre $\int_a^\infty f(x)dx$ converge si et seulement si, pour toute suite croissante $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ et telle que $a_0 = a$ et $a_n > a$ pour $n \geq 1$, la série

$$\sum_{n=0} \infty \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx$$

converge. De plus, en cas de convergence,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx\,.$$

Exercice 5

Pour a strictement positif, étudier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^a \sin^2 x}\,.$$

Exercice 6

Soit f une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\int_0^\infty f(x)dx$ est convergente. La fonction $f(x)$ doit-elle tendre vers 0 lorsque x tend vers ∞ ?

Exercice 7

Soit f une fonction strictement positive et derivable sur $[a, \infty[$ telle que $|f'(x)| \leq C$ pour tout $x \geq a$. La convergence de $\int_a^\infty f(x)dx$ implique-t-elle que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers ∞ ?