Feuille 4 : *Connexité et compacité*

Exercice 4.1. Lesquels des sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ suivants sont connexes :
a) $Y = \{(x,y); x \text{ ou } y \text{ rationnel }\}$;
b) $Z = \{(x,0); x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,1/x); x > 0\}$.

Exercice 4.2. Montrer qu'il ne peut y avoir d'homéomorphisme entre
a) le cercle et un intervalle de $\mathbb{R}$.
b) entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$.
(Indication : on ôtera un point sur chaque ensemble et on étudiera les propriétés de connexité.)

Exercice 4.3. Donner un exemple de partie connexe, dont l'intérieur n'est pas connexe.

Exercice 4.4. Soit X un espace métrique connexe et g_1, g_2 deux applications continues de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que $e^{2i\pi g_1} = e^{2i\pi g_2}$ implique que $g_1 - g_2$ est une constante entière.

Exercice 4.5. Lesquels des sous-ensembles suivants sont compacts
a)$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$;
b) $[0, \infty[$;
c) $\mathbb{Q}$;
d) $\mathbb{Q} \setminus [0,1]$;
e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$;
f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1 \text{ et } y = x^2\}$;
g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$.

Exercice 4.6. Montrer que $d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$ définit une distance sur $\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$.
Les fermés bornés de $\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$ sont-ils compacts ?
(on pourra considérer la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$)

Exercice 4.7. Soit l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$ normée par $||.||_\infty$. Trouver une suite de fonctions (f_n) de norme 1 qui réalise $||f_n - f_m||_\infty \geq 1$, $\forall n \neq m$. Que peut-on déduire ?

Exercice 4.8. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une bijection continue telle que $\lim_{||x||\to\infty} ||f(x)|| = \infty$. Montrer que f est un homéomorphisme.

Exercice 4.9. Soit A compact métrique. Montrer qu'il existe deux points x et y tels que $d(x,y) = diam(A)$.

Exercice 4.10. Soit E un espace métrique compact et $f : E \to E$ une fonction continue telle que $d(f(x), f(y)) \geq d(x,y)$. Montrer que f est un homéomorphisme.