UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Equations différentielles

F4 : Systèmes d'équations différentielles

Exercice 1

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2) Calculer e^{tA}, pour $t \in \mathbb{R}$.
3) En déduire la solution du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) & = & -y(t) \\ y'(t) & = & x(t) \end{cases}$$

avec condition initiale $x(0) = y(0) = 1$.
4) Dessiner les courbes paramétrés $(x(t), y(t))$.
5) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle

$$\begin{cases} x'(t) & = & -y(t) + e^t \\ y'(t) & = & x(t) \end{cases}$$

Exercice 2

Résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x' = -2x - 4y + \mathrm{e}^t \\ y' = x + 3y - t \end{cases}$$

Exercice 3

Calculer e^{tA} pour les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

1) Trouver deux matrices A et B tel que $e^{A+B} \neq e^A e^B$.
2) Quand a-t-on $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3) En déduire que $e^{tA}e^{-sA} = e^{(t-s)A}$ pour tout $t, s \in \mathbb{R}$.

Exercice 5

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On considère le système différentiel :

$$(\star) \qquad \begin{cases} x'(t) & = & a\,x(t) + b\,y(t) \\ y'(t) & = & c\,x(t) + d\,y(t) \end{cases}$$

1) Vérifier que $x(t) = 0, y(t) = 0$ est une solution constante du système $(\star)$.
2) On pose

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a) Exprimes $\det(A)$ et $\mathrm{Tr}(A)$ en fonctions des valeurs propres de A.
b) Si $\det(A) > 0$ que peut-on dire des valeurs propres de A.
c) Si $\det(A) > 0$ et $\mathrm{Tr}(A) < 0$ que peut-on dire de la partie réelle des valeurs propres de A.

3) En déduire que si $\det(A) > 0$ et $\mathrm{Tr}(A) < 0$ alors toute solution du système $(\star)$ vérifie

$$(x(t), y(t)) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} (0,0)\,.$$

Exercice 6

Calculer e^{tA} pour les matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 7

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' & = & y + z + t \\ y' & = & x + e^t \\ z' & = & x + y + z \end{cases}$$