Feuille 3 : *Limites*

Exercice 3.1. Soit x_n une suite de $\mathbb{R}$. Montrer que
a) la suite x_n est bornée si et seulement s'il n'existe pas de sous-suite x_{n_k} telle que $|x_{n_k}| \to \infty$.
b) Unicité de la limite : la suite x_n converge vers a si et seulement si pour toute sous-suite x_{n_k} il existe une sous-suite $x_{n_{k_p}}$ qui converge vers a.

Exercice 3.2. Soit x_n une suite de réels strictement positifs de limite nulle.
a) Soit S l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $x_m \leq x_n$ pour tout $m \geq n$. Montrer que S est infini.
b) Soit T l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $x_m \geq x_n$ pour tout $m \leq n$. Montrer que T est infini.

Exercice 3.3. Soit x_n une suite bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que x_n converge si et seulement si $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$.

Exercice 3.4. 1) Montrer qu'une suite stationnaire converge pour toutes les distances.
2) Montrer qu'une suite convergente pour la distance triviale est stationnaire.

Exercice 3.5. Soit $f \in \mathcal{F}(X, Y)$, où X, Y sont des espaces métriques. Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) f est continue.
(ii) Pour toute partie A de X, on a $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.
(iii) Pour toute partie B de Y , on a $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset [f^{-1}(B)]^{\circ}$.
(iv) Pour toute partie B de Y , on a $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

Exercice 3.6. Soient A, B des parties fermées, non vides, et disjointes de l'espace métrique X.
a) Démontrer que $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$;
b) Montrer que $d(x, A) + d(x, B) > 0$ pour tout $x \in X$.
Si $x \in X$, on pose :

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

c) Montrer que $f : X \to \mathbb{R}$ est continue, et que $f(x) = 0$ si $x \in A$ et $f(x) = 1$ si $x \in B$.
d) En déduire qu'il existe des ouverts U et V de X tels que :

$$A \subset U, \quad B \subset V, \quad U \cap V = \emptyset$$

Exercice 3.7. Pour $x, y \in [0, 1]$, on pose :

$$d(x, y) = |x - y|, \quad D(x, y) = |\sqrt{x} - \sqrt{y}|$$

a) Montrer que d et D sont des distances sur $[0,1]$, y définissant les mêmes ouverts.
b) Existe-t-il $k > 0$ tel que $D(x,y) \leq kd(x,y)$ pour tous $x, y \in [0,1]$?

Exercice 3.8. Le diamètre $\delta(A)$ d'une partie A d'un espace métrique X est défini par $\delta(\emptyset) = 0$ et, si A non vide, par $\delta(A) = \sup\{d(x,y), x, y \in A\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.
a) Soient A, B des parties de X. Etablir :
(i) $\delta(A) = 0$ si et seulement si A contient au plus un point.
(ii) Si $A \subset B$, alors $\delta(A) \leq \delta(B)$.
(iii) $\delta(\bar{A}) = \delta(A)$.
(iv) Si $A \cap B \neq \emptyset$ alors $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$.
b) Soient A, B, C des parties non vides de X. Montrer les assertions suivantes :
(i) $d(\overline{A}, \overline{B}) = d(A, B)$.
(ii) $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C) + \delta(B)$.
(iii) $d(A, B \cup C) = \min\{d(A, B), d(A, C)\}$.