UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Equations différentielles

F3 : Théorème de Cauchy-Lipschitz

Exercice 1

Calculer les dérivées partielles par rapport à x et à y des fonctions suivantes, en indiquant où elles sont définies :

$$f(x,y) = \sin(xy), \qquad g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad h(x,y) = \arctan(xy^2)$$

Exercice 2

1) Rappeler le théorème de Cauchy-Lipschitz.
2) Vérifier que $u(x) = 0$ et $v(x) = x^3$ sont deux solutions de

$$(\star) \quad y' = xy^{\frac{1}{3}}$$

pour la même condition initiale $(0,0)$.
3) Le théorème de Cauchy-Lipschitz serait-il en défaut ?

Exercice 3

Préciser les points où il y a existence et unicité par le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles ci-dessous :
a) $y' = \arctan(xy)$,
b) $y' = \sqrt{|y|}$,
c) $y' = \sin(x^2+y^2)$,
d) $y' = \frac{y}{x}$,
e) $y' = \frac{x}{y-1}$.

Exercice 4

On considère l'équation différentielle

$$(\star) \quad y' = x(\sin^2(x) + y^2\cos^2(x)).$$

1) Étudier l'existence et l'unicité des solutions de $(\star)$.
2) Étudier le sens de variation des solutions.
3) En déduire que toute solutions admet un minimum en $x = 0$.

Exercice 5

Montrer sans résoudre explicitement l'équation différentielle

$$y' = y^2 + 1$$

que toutes les solutions sont croissantes sur leur domaine de définition.

Exercice 6

On considère l'équation différentielle

$$(\star) \quad y' = y^2 + x^2$$

1. Montrer que les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites.
2. Montrer que si y est solution de $(\star)$ alors $-y(-x)$ est aussi solution de $(\star)$.
3. Prouver que y est strictement croissante.
4. On note $u : J \to \mathbb{R}$ la solution maximale de $(\star)$ de condition initiale $(0, 0)$.
   a) Montrer que u est impaire.
   b) Prouver que $\lim\limits_{x \to \sup J} u(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to \inf J} u(x) = -\infty$