UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Intégrale de fonctions de la variable réelle

TD3 : Primitives et intégrales

Exercice 1

Déterminer les primitives des fonctions suivantes en indiquant soigneusement leurs ensembles de définition :

$$(a)\ \frac{\log^{\alpha}(x)}{x}, \alpha \in \mathbb{R} \qquad (b)\ (\sin x)e^{x}$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

$$a)\ \int_0^{1/2} \frac{t^3}{1-t}\,dt \qquad b)\ \int_0^{1} \frac{t}{t^2-t+1}\,dt \qquad c)\ \int_0^{1} \frac{3t^2+3t+2}{t^3+t^2+t+1}\,dt$$

Exercice 3

Montrer que la fonction G définies par

$$G(x) = \int_{3x}^{\sin(4x)} \cos(t^2)\,dt$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 t^2 \arctan(t)\,dt \qquad J = \int_0^{\pi/4} \cos(t)\ \ln(1+\cos t)\,dt$$

$$K = \int_0^{\pi/4} \tan^3 t\,dt \qquad L = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}\,dt$$

Exercice 5

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n\,dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que la suite (I_n) converge.
3. Etablir une formule de récurrence entre I_n et I_{n-2}.
4. Montrer que le produit $(n+1)I_nI_{n+1}$ est constant.
5. Calculer $\lim_{n\to\infty} I_n, \lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}}$ et $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} I_n$.
6. Calculer I_{2n} et I_{2n+1} sous forme de produit et en déduire une suite de rationnels convergeant vers π.

Exercice 6

Déterminer toutes les fonctions continues $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\int_a^b f(t)\,dt = (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

Exercice 7

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n := \int_0^1 (1-t^2)^n\,dt$.
1) Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2) Calculer I_n.
3) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_k^n$.