Feuille 2 : *Notions de Topologie*

Exercice 2.1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. $\mathbb{R}$ est muni de sa distance usuelle.

a) Prouver que $]a, b[,]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

b) Prouver que $[a, b],]-\infty, a]$ et $[a, +\infty[$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.

c) Prouver que $[a, b[$ n'est ni ouvert, ni fermé dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2.2. Soit $(X; d)$ un espace métrique. Montrer que tout singleton de X est un fermé.

Exercice 2.3. Soit U un ouvert d'un espace métrique $(X; d)$. Montrer l'inclusion $U \subset \mathring{\overline{U}}$ et donner un exemple d'inclusion stricte.

Exercice 2.4. Soient X un espace métrique, A et B des parties de X telles que $A \subset B$. Montrer que $\overline{A} \subset \overline{B}$ et $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

Exercice 2.5. Soient X un espace métrique, A et B des parties de X. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. A-t-on toujours l'égalité ?
Comparer l'intérieur de $A \cup B$ avec $\mathring{A} \cup \mathring{B}$. Comparer de même l'intérieur de $A \cap B$ avec $\mathring{A} \cap \mathring{B}$.

Exercice 2.6. Lesquels des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont fermés ?

a) $\{(1/n, 0); n = 1, 2, \cdots\}$;

b) $\{(x, y); y = x^2\}$;

c) $\{(m, n); m, n \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 2.7. Soient A, B les parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

$$A = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\} \ , \ B = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{p}; n, p \in \mathbb{N}^*\}$$

Déterminer l'intérieur, l'adhérence et l'ensemble dérivé de A et B.

Exercice 2.8. Soit $(X; d)$ un espace métrique. Montrer que $diam(\overline{A}) = diam(A)$.

Exercice 2.9. Décrivez l'intérieur, l'adhérence et la frontière des sous-ensembles suivants :

a) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$;

b) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{2^{2n+1}}, \frac{1}{2^{2n}}] \subset \mathbb{R}$;

c) $\{(x,y); x^2 \leq y < x+1\} \subset \mathbb{R}^2$;

d) $\{(x; \sin(\frac{1}{x})), x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

Exercice 2.10. Soit U une partie d'un espace métrique X. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) U est un ouvert de X
(ii) Pour toute partie A de X, on a $\overline{A \cap U} = \overline{\overline{A} \cap U}$

Exercice 2.11. Soit E un espace métrique, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. On suppose que $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$ est fermé. Montrer que :

$$\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$$

Exercice 2.12. Soit A une partie d'un espace métrique X. On note $Fr(A)$ la frontière de A.
a) Montrer que $Fr(A) = \emptyset$ si et seulement si A est ouverte et fermée dans X.
b) Montrer que si A est fermée, $Fr(A)$ est d'intérieur vide.
c) Démontrer que A est ouverte si et seulement si $A \cap Fr(A) = \emptyset$.
d) Prouver que A est fermée si et seulement si $Fr(A) \subset A$.
e) Établir : $Fr(\overset{\circ}{A}) \subset Fr(A)$, $Fr(Fr(Fr(A))) = Fr(Fr(A))$.