UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Equations différentielles

F2 : Equations différentielles du premier ordre : linéaires, Bernoulli, Riccati.

Exercice 1

Soit a, b, c trois fonctions continues, avec $a(x) \neq 0$, sur un intervalle non-vide I. On considère les équations différentielles

$$(\star) \qquad a(x)y' + b(x)y = 0 \qquad \text{et} \qquad (\star\star) \qquad a(x)y' + b(x)y = c(x).$$

1) Vérifier que l'ensemble des solutions de $(\star)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2) Si y_0 et y_1 sont deux solutions de $(\star\star)$, que peut-on dire de $y_1 - y_0$?
3) En déduire toute les solutions de $(\star\star)$.
4) Comment peut-on résoudre l'équation $(\star)$?

Exercice 2

Résoudre les EDO suivantes avec condition initiale (x_0, y_0) :
i) $y' - 3y = 6$
ii) $y' + y = \sin x$
iii) $y' + y = \cos x + \sin x$
iv) $y' + y = 3e^{2x}$ avec $(x_0 = 0, y_0 = 2)$.

Exercice 3

Résoudre les EDO suivantes :
i)$y' - 2xy = \sinh x - 2x \cosh x$
ii) $y' - xy = x \sin^2 x$
iii) $2x(1-x)y' + (1-2x)y = 1$
iv) $xy' + y = \arctan x$.

Exercice 4

Résoudre les EDOs suivantes :

$a)$ $y' + y = xy^3$ $\qquad b)$ $y' + xy = xy^2$ $\qquad c)$ $y - \dfrac{x}{2}y' = \sqrt{y}$

$d)$ $xy' - y = y^2$ $\qquad e)$ $2xyy' + y^2 = x$ $\qquad f)$ $y' + y \text{ cotan } x + y^3 = 0$.

Exercice 5

Résoudre, en utilisant les solution particulières indiquées, les EDOs suivantes :
i) $x^3y' + y^2 - 5x^2y + 2x^4 = 0, \quad y_0 = x^2$.
ii) $y' = \tan(x)y^2 + \text{ cotan } (x)y - \frac{1+2\sin^2 x}{4\sin(x)\cos^3(x)}, \quad y_0 = -\frac{1}{2\cos^2(x)}$.
iii) $(y' - y^2)\cos(x) + y(2\cos^2(x) + \sin(x)) = \cos^3(x), \quad y_0 = \cos(x)$.
iv) $y' + y^2 = \frac{1}{4x^4}, \quad y_0 = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$.