UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Intégrale de fonctions de la variable réelle

TD2 : Fonction Riemann intégrable, intégrale de Riemann

Exercice 1

1. Rappeler la définition d'une fonction Riemann intégrable sur un intervale $[a, b]$.
2. Les fonctions étagées sont-elles Riemann intégrables.
3. Qu'est ce qu'une somme de Riemann.

Exercice 2

Les fonctions f suivantes sont-elles intégrables au sens de Riemann ?
1) $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = [t]$ où $[t]$ désigne la partie entière de t.
2) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} [\frac{1}{t}] & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Exercice 3

En utilisant la définition d'une intégrale de Riemann, calculer $\displaystyle\int_0^2 (3x + 1)dx$.

Exercice 4

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}\ .$$

1) Trouver une fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue positive telle que

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})\ .$$

2) Déterminer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $[0, 2]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

1. Calculer, pour tout $x \in [0, 2]$, l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.
2. La fonction $F : [0, 2] \to \mathbb{R}$ est-elle continue sur $[0, 2]$.
3. F est-elle dérivable sur $[0, 2]$? Calculer sa dérivée.

Exercice 6

Montrer que les suites ci-dessous sont convergentes et calculer leur limite :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$w_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} (n+k)} \qquad z_n = -n + \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}}$$

Exercice 7

Soit a un réel différent de ± 1.
1. Montrer que, pour tout réel x, on a $1 - 2a\cos(x) + a^2 > 0$.
2. Soit n un entier $n \geq 2$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - 2a\cos(\frac{2k\pi}{n}) + a^2) = \prod_{k=1}^{n} (a - e^{2ik\pi/n})(a - e^{-2ik\pi/n})$$

3. En déduire que :

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - 2a\cos(\frac{2k\pi}{n}) + a^2) = (a^n - 1)^2$$

4. En utilisant les sommes de Riemann, calculer

$$I = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2a\cos(x) + a^2)dx$$

Exercice 8

Soit x un réel strictement positif.
1. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{kx/n} = \frac{e^x - 1}{x}$$

2. En déduire, pour tout $x > 0$, la relation

$$\int_0^x e^t \, dt = e^x - 1$$