Université de Rennes 1 L3 2011-2012
Institut Mathématique de Rennes TopM

Feuille 1 : Espaces métriques

Exercice 1.1. Lesquelles des fonctions suivantes réalisent une métrique sur $\mathbb{R}$?

$$d_1(x;y) = (x-y)^2, \qquad d_2(x;y) = |x-y|^{1/2}$$
$$d_3(x;y) = |x-2y|, \quad d_4(x;y) = |\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y|.$$

Exercice 1.2. Soit d_1, d_2 deux distances sur un ensemble X. Montrer que l'application $d : X \times X \to \mathbb{R}$ définie par $d(x,y) = \max(d_1(x,y), d_2(x,y))$ est une distance sur X.

Exercice 1.3. Soit $(E;d)$ un espace métrique tel que E contient au moins deux points. Est-il possible que les seules boules ouvertes soient E et $\emptyset$?

Exercice 1.4. Existe-t-il un espace métrique (X,d) dans lequel les boules ouvertes et fermées coïncident.

Exercice 1.5. Soient B_1 et B_2 deux boules ouvertes d'un espace métrique et telles que $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Soit $x \in B_1 \cap B_2$, montrer qu'il existe une boule ouverte B telle que

$$x \in B \subset B_1 \cap B_2.$$

Exercice 1.6. Soit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$. Montrer que $||f||_2 = \sqrt{\int_0^1 f(x)^2 dx}$ est une norme sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 1.7.

1. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

   $$\|P\| = \sup\left\{ \left|P(1/n^2) - P'(1/n)\right|,\, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

   Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 1.8. Soit E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f(0) = 0$. On définit les quantités

$$\|f\|_1 = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \quad \text{et} \quad \|f\|_2 = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) + f'(x)|.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont des normes.
2. Montrer que les deux normes sont équivalentes.

Exercice 1.9. On définit sur $\mathbb{R}^2$ l'application suivante,

$$N(x,y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t^2}.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer l'équivalence des normes :

$$\frac{1}{2}\|(x,y)\|_2 \leq N(x,y) \leq \|(x,y)\|_2, \quad \text{avec} \quad \|(x,y)\|_2 = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 1.10. (Métrique S.N.C.F.) Soit d la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. On fixe un point $p \in \mathbb{R}^2$. Pour $x, y \in \mathbb{R}^2$ on pose :

$$D(x,y) = \begin{cases} d(x,y) & \text{si } x,y,p \text{ sont alignés} \\ d(x,p)+d(y,p) & \text{si } x,y,p \text{ ne sont pas alignés} \end{cases}$$

a) Prouver que D est une distance sur $\mathbb{R}^2$.
b) Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$.
(i) Dessiner la boule $B_D(p,r)$.
(ii) Soit $m \in \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$. Dessiner la boule $B_D(m,r)$ (distinguer suivant que $r \leq d(p,m)$ ou non).

Exercice 1.11. Soit $d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}_+$ l'application définie par

$$d(p_1/q_1, p_2/q_2) = |p_1 - p_2| + |q_1 - q_2|,$$

avec $p_i \in \mathbb{Z}, q_i \in \mathbb{N}^*$ et p_i et q_i sont premiers entre eux.

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{Q}$.
2. Montrer que d n'est pas équivalente à la distance usuelle sur $\mathbb{Q}$.
3. Montrer que pour tous $x_0 \in \mathbb{Q}, r > 0$, la boule ouverte $B_o(x_0,r)$ est de cardinal fini. Vérifier que cette boule est réduite à un singleton si $r < 1$.
4. Montrer que si $r \notin \mathbb{N}$ alors la boule ouverte $B_o(x_0,r)$ et la boule fermée $B_f(x_0,r)$ coïncident.
5. Montrer que la distance d et la distance discrète sont topologiquement équivalentes mais elles ne sont pas équivalentes.

Exercice 1.12. Soit $(X;d)$ un espace métrique.
a) Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante s'annulant uniquement en 0 et sous-additive, i.e. vérifiant :

$$\forall u,v \in \mathbb{R}_+, \ \varphi(u+v) \leq \varphi(u) + \varphi(v).$$

Montrer que $\varphi \circ d$ est une distance sur X.
b) Vérifier que d et $\varphi \circ d$ sont métriquement équivalentes s'il existe une constante C > 0 telle que $C^{-1}u \leq \varphi(u) \leq Cu$, et topologiquement équivalentes si φ est continue en 0.