UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Topologie des espaces métriques

Contrôle 3 (Durée : 1 heure)

Exercice 1

(1) Caractériser les compacts par le suites.

(2) Carcatériser les connexes de $\mathbb{R}$.

(3) Soit E un espace métrique. Montrer que la réunion de deux singletons est compacte.

(4) Est ce que la réunion de deux connexe est connexe ? Justifier votre réponse.

Exercice 2

Soient E un espace métrique, K une partie *compacte* non vide de E et F une partie *fermée* non vide de E avec $F \cap K = \emptyset$. On définit l'application $f : E \to \mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = d(x, F) := \inf_{y \in F} d(x, y).$$

On admet dans la suite que f est continue.

(1) Montrer qu'il existe $x_0 \in K$ tel que

$$\inf_{x \in K} f(x) = f(x_0).$$

(2) Montrer que $f(x_0) > 0$.

(3) En déduire

$$\inf_{(x,y) \in K \times F} d(x, y) > 0.$$

Exercice 3

Soit $E = \mathcal{C}([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, muni de la norme uniforme

$$\|f\| := \sup_{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} |f(x)|.$$

On définit l'application $T : E \to \mathbb{R}$ par

$$f \in E, \quad Tf = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) f(x) dx.$$

(1) Vérifier que T est linéaire.

(2) Montrer que T est continue.

(3) Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx$.

(4) En déduire que

$$\|T\| \leq 2.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on définit la fonction *impaire* $\phi_n : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ par

$$\phi_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 1, & x \in [\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}]. \end{cases} \tag{1}$$

(5) Calculer $T\phi_n$.

(6) Calculer $\|T\|$.