UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Topologie des espaces métriques

Contrôle 16/11/2011 (Durée : 1 heure)

Question de cours :
1) Quelles sont les parties connexes de $(\mathbb{R}, |.|)$?
2) Qu'est-ce qu'un homéomorphisme d'espaces métriques ?
3) Quelles sont les parties compactes de $(\mathbb{R}^n, |.|)$?

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré n muni de la norme

$$||\sum_{i=0}^{n} a_i X^i|| = \sum_{i=0}^{n} |a_i|\,.$$

On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} T : E & \to & E \\ P & \mapsto & XP'(X) \end{array}$$

1) Montrer que T est linéaire continue.
2) Montrer que

$$\forall P \in E \quad ||T(P)|| \leq n||P||.$$

3) En déduire que T est linéaire continue ; puis que

$$||T|| = \sup_{||P||=1} ||T(P)|| \leq n\,.$$

4) Calculer $||T(X^n)||$.
5) En déduire que $||T|| = n$.
6) Trouver tout les $P \in E$ tel que $||T(P)|| = n||P||$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)^2 = 1$$

1) Que peut-on dire dire sur l'image de f ?
2) En déduire que f est constante.

Exercice 3

Soit (E, d) un espace métrique f une application de E dans E. On appelle le graphe de f la partie

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)),\ x \in E\} \subset E \times E\,.$$

On munit $E \times E$ de la distance produit $d_1((x, y); (x', y')) = d(x, x') + d(y, y')$.

1) Montrer qu'une suite $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ dans $E \times E$ converge si et seulement si les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans E.
2) Montrer que si f est continue alors le graphe Γ_f est un fermé de $E \times E$.
3) On suppose que f est bijective.

a) Montrer que l'application $T : E \times E \to E \times E$ donnée par

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad T(x, y) = (y, x) \quad \text{est un homéomorphisme .}$$

b) Montrer la relation $T(\Gamma_{f^{-1}}) = \Gamma_f$.

c) En déduire que si f est continue alors $\Gamma_{f^{-1}}$ est un fermé de $E \times E$.

4) Montrer que si f est continue et (E, d) est compact alors Γ_f est une partie compacte de $E \times E$.