
Contrôle : Mercredi 12/10/2011 (Durée : 30 minutes)

Exercice 1

- 1) Rappeler la définition de la limite sup et inf d'une suite réelle bornée.
- 2) Déterminer la limite sup et inf de la suite $(\cos(n\pi))_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 2

On considère \mathbb{R} muni de la distance triviale d_0 définie par $d_0(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et $d_0(x, y) = 0$ si $x = y$.

- 1) Montrer que toute suite de \mathbb{R} convergente pour la distance d_0 est stationnaire.
- 2) Déterminer l'adhérence et l'intérieur dans (\mathbb{R}, d_0) de l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Exercice 3

Soit (X, d) un espace métrique.

1) Montrer que

a) A ouvert de $(X, d) \implies A \subset \overset{\circ}{\bar{A}}$;

b) A fermé de $(X, d) \implies \overset{\circ}{\bar{A}} \subset A$.

2) En déduire que pour toute partie B de X

$$\overline{\overset{\circ}{B}} = \overset{\circ}{\bar{B}}$$

3) Donner un exemple d'inclusion stricte pour chacun des cas évoqués à la question 1).