

**Question de cours** : Qu'est ce qu'une norme ?

**Exercice 1**

- 1) Montrer que l'application  $d(x, y) = |\ln(x) - \ln(y)|$  est une distance sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- 2) Identifier explicitement la boule ouverte  $B(1, 1)$  de  $(\mathbb{R}_+^*, d)$ .

## Exercice 2

Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

1) Rappeler la définition d'un ouvert de  $(X, d)$ .

2) Soit  $O$  un ouvert et  $F$  un fermé de  $(X, d)$ . Montrer que  $O \setminus F$  est un ouvert de  $(X, d)$ .

3) Soit  $A$  une partie non-vide de  $X$ . On rappelle que

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y), y \in A\}.$$

a) Montrer que pour tout  $x, y \in X$  et  $z \in A$ , on a

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

b) Montrer que pour tout  $r > 0$  l'ensemble

$$E_r = \{x \in X : d(x, A) > r\}$$

est un ouvert de  $(X, d)$ .

c) En déduire que l'ensemble  $E = \{x \in X : d(x, A) > 0\}$  est un ouvert de  $(X, d)$ .