

Question de cours : Qu'est ce qu'une norme ?

Exercice 1

- 1) Montrer que l'application $d(x, y) = |\ln(x) - \ln(y)|$ est une distance sur \mathbb{R}_+^* .
- 2) Identifier explicitement la boule ouverte $B(1, 1)$ de (\mathbb{R}_+^*, d) .

Exercice 2

Soit (X, d) un espace métrique.

1) Rappeler la définition d'un ouvert de (X, d) .

2) Soit O un ouvert et F un fermé de (X, d) . Montrer que $O \setminus F$ est un ouvert de (X, d) .

3) Soit A une partie non-vide de X . On rappelle que

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y), y \in A\}.$$

a) Montrer que pour tout $x, y \in X$ et $z \in A$, on a

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

b) Montrer que pour tout $r > 0$ l'ensemble

$$E_r = \{x \in X : d(x, A) > r\}$$

est un ouvert de (X, d) .

c) En déduire que l'ensemble $E = \{x \in X : d(x, A) > 0\}$ est un ouvert de (X, d) .