

# Chapitre 2

## Cinématique des fluides

La cinématique est la caractérisation des mouvements des fluides. En mécanique du point, la cinématique consistait simplement à déterminer la vitesse du point, son accélération et sa trajectoire. En mécanique du solide, il fallait caractériser vitesse, accélération et trajectoire du centre de gravité du solide, ainsi que sa rotation sur lui-même. En mécanique des fluides, l'étude de la cinématique est un peu plus complexe car les différentes particules fluides constituant le milieu se déplacent de manière (partiellement) indépendante les unes des autres.

### 2.1 Description lagrangienne

#### 2.1.1 Définition

Dans la *description lagrangienne*, le déplacement de chaque particule fluide est suivi à partir de l'instant initial : la position  $\vec{x} = \overrightarrow{OM}$  de la particule à l'instant  $t$  est repérée par sa position initiale  $\vec{a} = \overrightarrow{OM_0}$  et par  $t$  (voir Fig. 2.1) :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{x}(\vec{a}, t) = \begin{pmatrix} x_1(a_1, a_2, a_3, t) \\ x_2(a_1, a_2, a_3, t) \\ x_3(a_1, a_2, a_3, t) \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Les variables  $(a_1, a_2, a_3, t)$  sont appelées *variables de Lagrange*.

**Remarque :** On peut réciproquement associer de manière non-univoque une position initiale à une position à l'instant  $t$  :  $\vec{a} = \vec{a}(\vec{x}, t)$ .

#### 2.1.2 Trajectoire des particules fluides

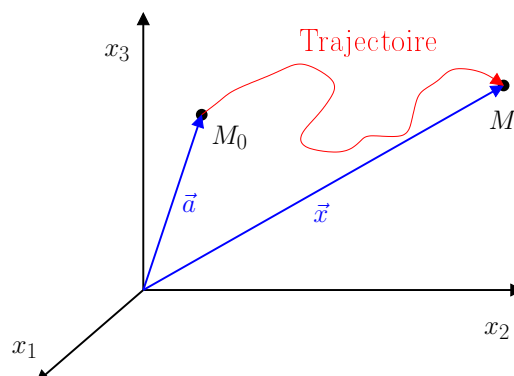


FIGURE 2.1 – Déplacement d'une particule fluide entre sa position initiale  $\vec{a}$  et sa position  $\vec{x}$  à l'instant  $t$ .

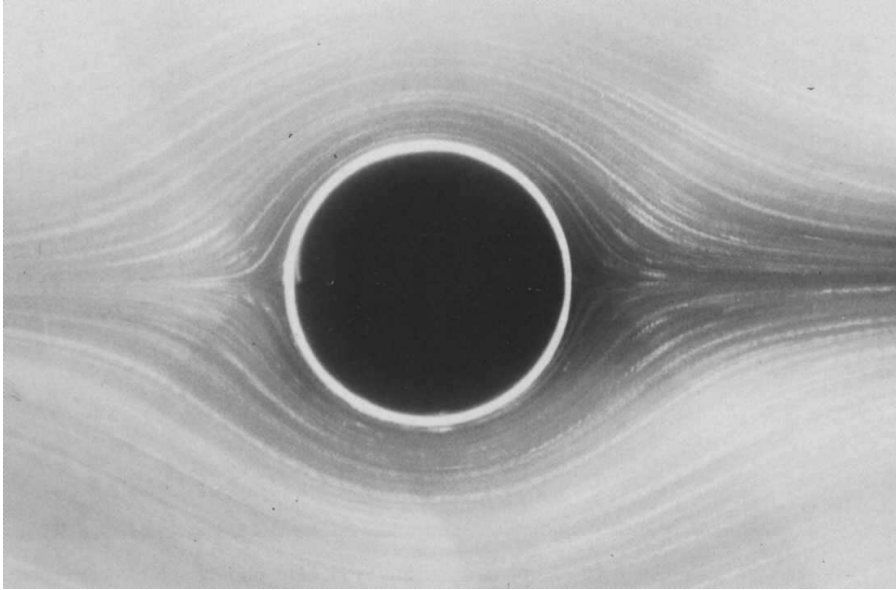


FIGURE 2.2 – Visualisation des lignes de courant (également trajectoires) lors d'une expérience d'écoulement stationnaire autour d'un cylindre.

### 2.1.2.1 Définition

La *trajectoire* d'une particule fluide est le lieu de toutes ses positions successives au cours du temps. En description lagrangienne, elle est simplement décrite, pour une position initiale  $\vec{a}$  donnée, par l'évolution du vecteur position  $\vec{x}(\vec{a}, t)$ .

Mathématiquement, elle est donc définie dans l'espace à trois dimensions par le système de 3 équations paramétriques suivant :

$$\begin{cases} x_1 = x_1(a_1, a_2, a_3, t) \\ x_2 = x_2(a_1, a_2, a_3, t) \\ x_3 = x_3(a_1, a_2, a_3, t) \end{cases}, \quad (2.2)$$

où  $(a_1, a_2, a_3)$  sont fixés. Dans certains cas on peut éliminer le temps entre les équations ci-dessus, et obtenir deux équations cartésiennes reliant les coordonnées  $x_i$  entre elles.

### 2.1.2.2 Observation expérimentale

Pour observer les trajectoires dans une expérience, on « ensemece » le fluide avec des *traceurs passifs* (petites particules réfléchissantes très légères qui sont entraînées par l'écoulement), et on prend une photo avec un temps de pause très long. Chaque traceur « marque » alors le déplacement d'une particule fluide au contact de laquelle il se trouve : les traces des positions successives du traceur forment une ligne qui est la trajectoire (voir Fig.2.2).

## 2.1.3 Vitesse et accélération lagrangiennes

La vitesse d'une particule fluide est la dérivée par rapport au temps de son vecteur position  $\vec{x}$ . Cette définition rejoint la définition de la vitesse d'une masse ponctuelle en mécanique du point. Ainsi, pour une particule fluide donnée, c.a.d à  $\vec{a}$  fixé :

$$\boxed{\tilde{\vec{v}}(\vec{a}, t) = \left. \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \right|_{\vec{a}}}.$$

**Remarque :** On peut également écrire cette relation en utilisant les *notations de Newton*, dans lesquelles les vecteurs sont notés sous la forme de leurs composantes indicées :

$$\tilde{v}_i(a_j, t) = \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)_{a_j} .$$

Ici, l'indice  $i$  indique une composante donnée des vecteurs vitesse et position, tandis que l'indice  $j$  dénote l'ensemble des composantes du vecteur position initiale  $\vec{a}$ .

L'accélération d'une particule fluide est la dérivée temporelle de sa vitesse, soit

$$\tilde{\gamma}(\vec{a}, t) = \left. \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \right)_{\vec{a}} = \left. \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2} \right)_{\vec{a}} , \quad (2.3)$$

ce qui s'écrit en notation de Newton :

$$\tilde{\gamma}_i(a_j, t) = \left. \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t} \right)_{a_j} = \left. \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \right)_{a_j} .$$

### 2.1.4 Suivi d'une grandeur attachée à une particule fluide

Une grandeur  $\tilde{F}$  mesurée en suivant la particule fluide ( $F$  pourrait être la masse volumique ou la température, par exemple) est, comme le vecteur position  $\vec{x}$ , complètement définie par la donnée de la position initiale  $\vec{a}$  de la particule, et du temps :  $\tilde{F}(\vec{a}, t)$ .

## 2.2 Description eulérienne

### 2.2.1 Définition

Dans la description *eulérienne*, une grandeur physique  $F$  est mesurée à une position  $\vec{x}$  dans le milieu et à un instant  $t$  :  $F(\vec{x}, t)$ . En particulier, le champ de vitesse  $\vec{v}$ , dit « champ de vitesse eulérien », repère la vitesse de la particule fluide qui se trouve à la position  $\vec{x}$  à l'instant  $t$  :

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} v_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ v_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ v_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{pmatrix} . \quad (2.4)$$

Les variables  $(x_1, x_2, x_3, t)$  sont appelées *variables d'Euler*.

**Remarque 1 :** La description eulérienne est la description du milieu continu qui est directement obtenue par intégration à l'échelle de la particule fluide des propriétés microscopiques (voir paragraphe 1.2.2).

**Remarque 2 :** Pour différencier les fonctions de 3 variables représentant la dépendance d'une grandeur physique vis-à-vis (i) des variables de Lagrange en description lagrangienne, et (ii) des variables d'Euler en description eulérienne, on place un « tilde » (~) au-dessus des premières.

### 2.2.2 Lien avec la description lagrangienne

La description eulérienne, au contraire de la description lagrangienne, ne s'attache pas à suivre les particules fluides dans leur déplacement, mais au contraire les regarde passer à partir d'un référentiel commun (par exemple le référentiel du laboratoire, c.a.d de la cuve dans laquelle le fluide s'écoule).

Mais ces deux descriptions sont totalement équivalentes :  $F(\vec{x}, t)$  est la valeur de la grandeur physique  $F$  correspondant à la particule fluide qui se trouve en  $\vec{x}$  à l'instant  $t$ . Si  $\vec{a}$  est la position initiale de cette particule fluide, alors  $\vec{x} = \vec{x}(\vec{a}, t)$ , et donc la valeur  $\tilde{F}(\vec{a}, t)$  peut être obtenue comme

$$\tilde{F}(\vec{a}, t) = F(\vec{x}(\vec{a}, t), t) . \quad (2.5)$$

De la même manière :

$$F(\vec{x}, t) = \tilde{F}(\vec{a}(\vec{x}, t), t) . \quad (2.6)$$

**Remarque :** La description eulérienne est celle que l'on utilise généralement pour poser les équations caractéristiques du principe fondamental de la dynamique, appliqué à un fluide. Mais la description lagrangienne est intéressante pour comprendre certains concepts (comme celui de trajectoire) et pour écrire des simulations numériques fondées sur le suivi des particules fluides.

## 2.2.3 Lignes de courant

### 2.2.3.1 Définition

Les *lignes de courant* (définies à un instant  $t$  donné) sont l'ensemble des lignes qui sont tangentes au champ de vitesse  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  en chacun de leurs points. Elles représentent une vue instantanée de la façon dont les directions des vecteurs vitesse sont réparties spatialement.

Mathématiquement, on peut déterminer les lignes de courant à un instant donné à partir de la donnée du champ de vitesses  $\vec{v}(\vec{x}, t)$ , en posant la proportionnalité du vecteur déplacement élémentaire  $d\vec{x}$  et du vecteur vitesse  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  :

$$d\vec{x} \parallel \vec{v}(\vec{x}, t) \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{dx_1}{v_1(\vec{x}, t)} = \frac{dx_2}{v_2(\vec{x}, t)} = \frac{dx_3}{v_3(\vec{x}, t)}}. \quad (2.7)$$

Ce système de deux équations (car deux égalités) différentielles du premier ordre (car les dérivées sont des dérivées premières) doit être intégré à  $t$  constant pour obtenir deux relations liant les variables  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) et comportant deux constantes d'intégration. À un temps donné, on obtient ainsi une famille de courbes ; on peut décrire l'infinité des courbes composant la famille en faisant varier les constantes d'intégration.

**Remarque 1 :** Si on travaille dans un espace à deux dimensions, on obtient une seule relation reliant les deux variables de coordonnées, et une seule constante d'intégration.

**Remarque 2 :** Dans le cas général, lignes de courant et trajectoires ne correspondent pas à la même chose : les lignes de courant correspondent à une observation ponctuelle, tandis que les trajectoires correspondent à une observation dans le temps.

### 2.2.3.2 Observation expérimentale :

Pour observer les lignes de courant dans une expérience d'écoulement, on utilise des traceurs passifs et on prend une photo avec un temps de pause court. Le déplacement d'un particule fluide en  $\vec{x}$  apparaît sur la photo comme un bâtonnet dont la longueur est proportionnelle à la vitesse  $\vec{v}(\vec{x}, t)$ , et qui est tangent à la ligne de courant passant par le point  $M(\vec{x})$ . Si les traceurs sont répartis de manière suffisamment dense dans le fluide, l'ensemble des bâtonnets fait apparaître assez clairement les lignes de courant. La figure 2.3 en est un exemple (le temps de pause est cependant un peu long pour cette photo).

## 2.2.4 Détermination des trajectoires en description eulérienne

Lorsqu'on connaît le champ de vitesses eulérien  $\vec{v}(\vec{x}, t)$ , on peut déterminer les trajectoires des particules fluides en intégrant la relation

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t) \quad \text{soit} \quad \boxed{dt = \frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, t)}}, \quad (2.8)$$

ce qui constitue trois équations différentielles (en général, couplées) du premier ordre. En les intégrant, on obtient un système d'équations paramétriques de la forme

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t, C_1, C_2, C_3) \\ x_2 = x_2(t, C_1, C_2, C_3) \\ x_3 = x_3(t, C_1, C_2, C_3) \end{cases}, \quad (2.9)$$

où  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont trois constantes d'intégration. On peut généralement redéfinir ces constantes de façon à ce qu'elles correspondent aux trois composantes de la position initiale, en accord avec la définition des trajectoires présentée au paragraphe 2.1.2.1.



FIGURE 2.3 – Visualisation des lignes de courant dans une expérience.

### 2.2.5 Cas des écoulements permanents

Un écoulement est dit *permanent* ou *stationnaire* si en description eulérienne l'écoulement est indépendant du temps. Pour un tel écoulement, le champ eulérien d'une grandeur physique  $F$  ne dépend que de la position dans l'espace et pas du temps :  $F = F(\vec{x})$ .

Les écoulements permanents ont ceci de particulier que les lignes de courant (qui n'évoluent pas dans le temps) coïncident avec les trajectoires des particules fluides. Cette propriété est clairement démontrée en comparant les systèmes d'équations (équations (2.7) et (2.8)) qui les définissent : lorsque la dépendance en temps disparaît, ces systèmes d'équations deviennent parfaitement identiques l'un à l'autre.

### 2.2.6 Accélération eulérienne et dérivée particulaire

On a vu que l'accélération d'une particule fluide s'exprime simplement comme la dérivée partielle de sa vitesse *lagrangienne* par rapport au temps. Clairement, ça ne correspond pas à la dérivée temporelle de sa vitesse eulérienne, car celle-ci s'écrit

$$\left. \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right|_{\vec{x}} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(\vec{x}, t + dt) - \vec{v}(\vec{x}, t)}{dt},$$

expression dans laquelle les deux vecteurs-vitesse sont les vitesses de deux particules fluides différentes situées en  $\vec{x}$  à deux temps différents.

On va à présent établir l'expression qui permet de calculer l'accélération à partir du champ de vitesse eulérien. Pour ce faire on part de la définition lagrangienne de la  $i$ -ième composante de l'accélération :

$$\tilde{\gamma}_i(\vec{a}, t) = \left. \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t} \right|_{\vec{a}}. \quad (2.10)$$

Comme  $\tilde{v}_i(\vec{a}, t) = v_i(\vec{x}(\vec{a}, t), t)$ , on peut réécrire l'expression ci-dessus comme

$$\tilde{\gamma}_i(\vec{a}, t) = \left. \frac{\partial (v_i(\vec{x}(\vec{a}, t), t))}{\partial t} \right|_{\vec{a}},$$

et en développant la dérivée partielle on obtient :

$$\tilde{\gamma}_i(\vec{a}, t) = \left. \frac{\partial v_i}{\partial t} \right|_{\vec{x}=\vec{x}(\vec{a}, t)} + \sum_{j=1}^3 \left. \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{\vec{x}=\vec{x}(\vec{a}, t)} \cdot \underbrace{\left. \frac{\partial x_j}{\partial t} \right|_{\vec{x}=\vec{x}(\vec{a}, t)}}_{= \tilde{v}_j(\vec{a}, t) = v_j(\vec{x}(\vec{a}, t), t)}$$

$$\text{soit } \gamma_i(\vec{x}(\vec{a}, t), t) = \left. \frac{\partial v_i}{\partial t} \right|_{\vec{x}=\vec{x}(\vec{a}, t)} + \sum_{j=1}^3 \left. \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{\vec{x}=\vec{x}(\vec{a}, t)} \cdot v_j(\vec{x}(\vec{a}, t), t),$$

ce qui peut s'écrire en utilisant les variables  $(\vec{x}, t)$  plutôt que  $(\vec{a}, t)$  :

$$\gamma_i(\vec{x}, t) = \left. \frac{\partial v_i}{\partial t} \right|_{\vec{x}} + \sum_{j=1}^3 \left. \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{\vec{x}} \cdot v_j(\vec{x}, t) \quad i = 1, 2, 3.$$

On obtient finalement :

$$\vec{\gamma}(\vec{x}, t) = \left. \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right|_{\vec{x}} + \sum_{j=1}^3 \left. \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_j} \right|_{\vec{x}} \cdot v_j(\vec{x}, t),$$

ce qui peut se réécrire de manière plus concise sous la forme :

$$\boxed{\vec{\gamma}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}}. \quad (2.11)$$

Ainsi l'accélération de la particule fluide est exprimée dans la description eulérienne comme la somme

- d'un *terme instationnaire*  $\partial \vec{v} / \partial t$  qui traduit la variation de vitesse de la particule fluide due à la dépendance temporelle du champ de vitesse,
- d'un *terme convectif* qui traduit le fait que la vitesse varie également parce qu'elle est évaluée en un point différent à  $t + dt$  du point où elle est évaluée à  $t$ .

**Généralisation :** Toute variation d'une grandeur scalaire  $F$  estimée en suivant une particule fluide dans son mouvement doit, en formalisme eulérien, être calculée en utilisant une *dérivée particulière* constituée de la somme d'un terme instationnaire et d'un terme convectif :

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) F}. \quad (2.12)$$

Cette relation est vraie en particulier pour chaque composante  $v_i$  du vecteur vitesse eulérien :

$$\gamma_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \left( v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) v_i, \quad (2.13)$$

expression dans laquelle on a éliminé la somme sur les indices  $j$  (notation de Newton). La relation (2.11) ci-dessus est la réunion des trois expressions scalaires (2.13) pour  $i = 1, 2$  et  $3$ .

## 2.2.7 Changement de référentiel

Le formalisme eulérien est lié au référentiel par rapport auquel on repère les positions des particules fluides.

À la figure 2.4, on montre les lignes de courant d'un écoulement stationnaire autour d'un cylindre fixe, ainsi que le champ de vitesses correspondant. La vitesse du fluide est uniforme loin du cylindre, orientée vers la droite et de norme  $V$ .

À la figure 2.5, on considère le même problème, mais on se place dans le référentiel de l'écoulement : c'est le cylindre qui se déplace vers la gauche à la vitesse  $V$ . Le champ de vitesse et les lignes de courant sont complètement différents de ceux de la figure 2.4, et de plus l'écoulement n'est plus stationnaire dans ce référentiel : le fluide est poussé par le cylindre, s'écarte par le haut et le bas et revient se positionner derrière le cylindre ; le champ de vitesse se déplace horizontalement avec le cylindre et n'est donc pas invariant dans ce référentiel (fig. 2.5). Les trajectoires sont quant à elles complètement différentes des lignes de courant (fig. 2.6(b)).

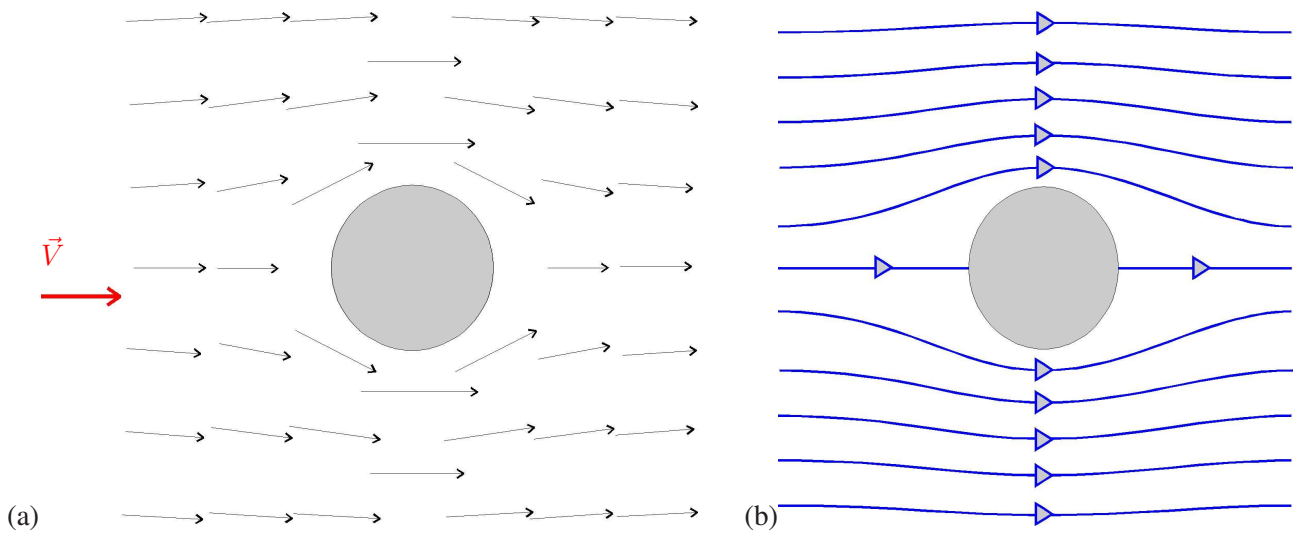


FIGURE 2.4 – (a) Champ de vitesse d’un écoulement stationnaire autour d’un cylindre fixe. – (b) Lignes des courant correspondantes.

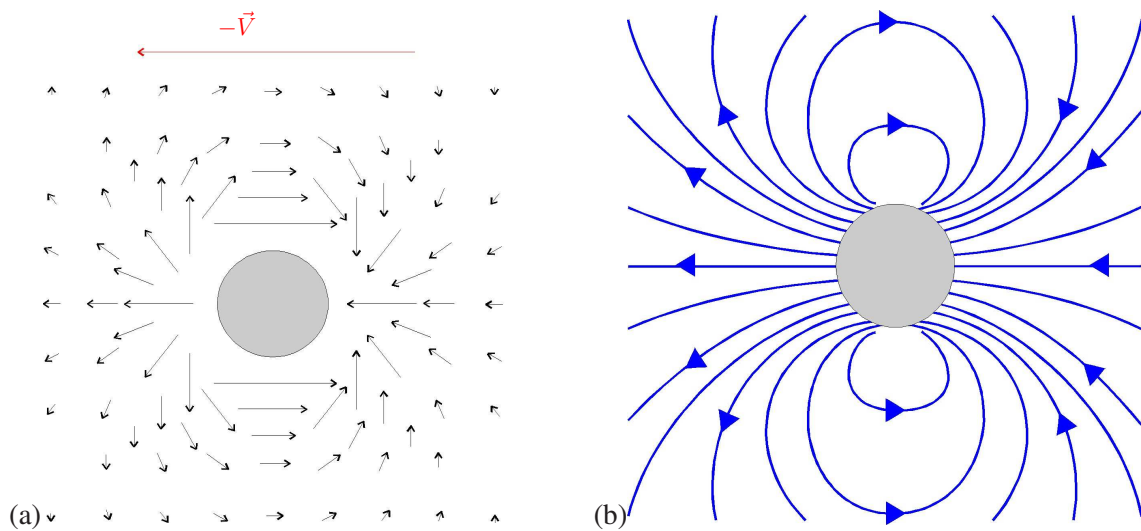


FIGURE 2.5 – (a) Champ de vitesse dans le référentiel du laboratoire ; le cylindre se déplace vers la gauche à la vitesse  $V$ . – (b) Lignes des courant correspondantes.

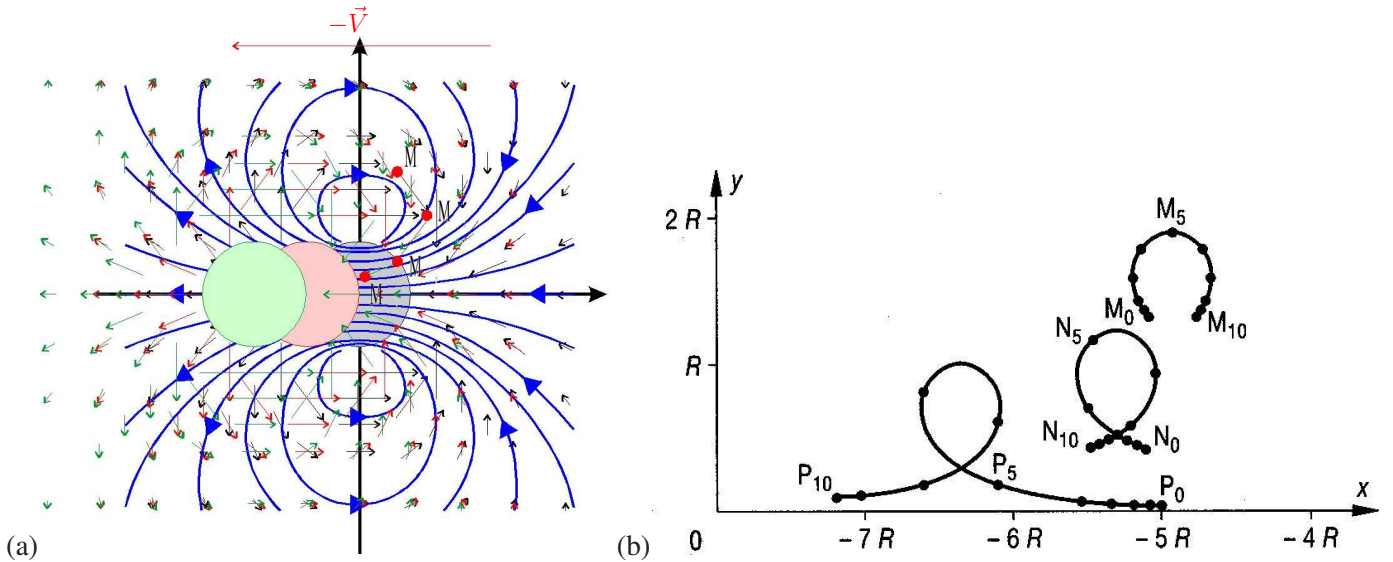


FIGURE 2.6 – (a) Configuration identique à celle de la figure 2.5. Les lignes de courant et champ de vitesse sont superposés à trois temps successifs.– (b) Exemples de trajectoires de particules.

## 2.3 Déformation d'une particule fluide

Dans un champ de vitesse non uniforme, les particules fluides se déforment. Les déformation peuvent être de plusieurs types : dilatation, rotation en bloc, cisaillement. Ce sont les dérivées partielles du champ de vitesse qui déterminent la façon dont se déforment les particules fluides.

### 2.3.1 Tenseur des taux de déformation

On appelle *tenseur des taux de déformation* le « champ matriciel » (grandeur représentée par une matrice et définie en tout point du milieu) dont l'élément à la ligne  $i$  et à la colonne  $j$  est

$$G_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} . \quad (2.14)$$

On peut toujours réécrire le tenseur sous la forme d'une somme d'une partie symétrique ( $S_{j,i} = S_{i,j}$ ) et d'une partie antisymétrique ( $A_{j,i} = -A_{i,j}$ ) :

$$\boxed{G_{i,j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)} . \quad (2.15)$$

$S_{i,j}$                        $A_{i,j}$

### 2.3.2 Interprétation du terme antisymétrique

Les termes diagonaux de la partie antisymétrique  $A$  sont nuls ( $A_{i,i} = -A_{i,i}$ ), et on peut réécrire le tenseur  $A$  sous la forme

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

où les  $(\Omega_i)$  sont les composantes du vecteur *tourbillon* ou *vorticité* :

$$\boxed{\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} . \quad (2.16)$$



Supposons que la partie symétrique du tenseur des contraintes est nulle en  $\vec{x}$  à  $t$ , alors  $G_{i,j} = A_{i,j}$  et donc  $\forall (i, j) G_{j,i} = -G_{i,j}$ ; le vecteur tourbillon peut être réécrit comme

$$\vec{\Omega} = 2 \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}.$$

Considérons alors à l'instant  $t$  deux particules fluides situées respectivement aux positions  $\vec{x}$  et  $\vec{x} + d\vec{x}$ . Le différentiel de vitesse entre les deux particules fluides à  $t$  est  $d\vec{v} = \vec{v}(\vec{x} + d\vec{x}, t) - \vec{v}(\vec{x}, t)$ , dont la composante  $i$  s'écrit  $dv_i = \sum_{j=1}^3 (\partial v_i / \partial x_j) dx_j$ . En particulier, et compte tenu de la nullité des termes diagonaux du tenseur des déformations, la première composante  $dv_1$  s'écrit

$$dv_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} dx_3 = -\frac{\partial v_2}{\partial x_1} dx_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} dx_3,$$

qui est la première composante du vecteur  $(1/2) \vec{\Omega} \wedge d\vec{x}$ . On peut démontrer la même égalité pour les deux autres composantes, de sorte que

$$d\vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \wedge d\vec{x}.$$

Ce type de relation est caractéristique d'un mouvement de rotation en bloc du fluide au voisinage de la position  $\vec{x}$ , le vecteur-rotation correspondant étant  $\vec{\Omega}$ .

**Conclusion :** La partie antisymétrique du tenseur des taux de déformation, et, de manière équivalente, le champ de vecteur tourbillon  $\vec{\Omega}$ , traduisent le taux de rotation local du fluide au point où ils sont calculés.

### 2.3.3 Interprétation du terme symétrique

La partie symétrique  $S$  du tenseur des taux de déformation traduit deux types de déformation :

1. La somme des termes diagonaux de la matrice (appelée *la trace* de la matrice) n'est autre que  $\sum_i \partial v_i / \partial x_i$ , c.a.d la divergence du champ de vitesse. En raisonnant sur un élément de volume élémentaire cubique  $\delta\mathcal{V}$  et en regardant comment il se déforme sous l'effet des termes diagonaux de  $S$ , on peut montrer que la divergence est égale au taux de variation relative de volume :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\delta\mathcal{V}} \frac{d(\delta\mathcal{V})}{dt}. \quad (2.17)$$

Démontrons cette relation en deux dimensions : soit au temps  $t$  un rectangle  $ABCD$  avec  $A(x_1, x_2)$ ,  $B(x_1 + dx_1, x_2)$ ,  $C(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$ ,  $D(x_1, x_2 + dx_2)$ . On suppose que le tenseur des déformations est symétrique et que seuls ses termes non-diagonaux sont non-nuls :  $v_1$  ne dépend que de  $x_1$  et  $v_2$  ne dépend que de  $x_2$ . Au temps  $t + dt$  le rectangle est devenu  $A'B'C'D'$ , avec  $A' = A + \vec{v}(x_1, x_2, t) dt$ ,  $B' = B + \vec{v}(x_1 + dx_1, x_2, t) dt$ ,  $C' = C + \vec{v}(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, t) dt$ ,  $D' = D + \vec{v}(x_1, x_2 + dx_2, t) dt$ .

Ainsi

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} + (\vec{v}(x_1 + dx_1, x_2, t) - \vec{v}(x_1, x_2, t)) dt \hat{x}_1 = \overrightarrow{AB} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 dt \hat{x}_1,$$

et la variation de longueur du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est

$$d(AB) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 dt \quad \text{soit} \quad \frac{d(AB)}{AB} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dt.$$

De la même manière  $d(AD)/AD = (\partial v_2 / \partial x_2) dt$ , et la variation relative de la surface du rectangle,  $S = AB \cdot AC$ , durant le temps  $t$ , est bien  $dS/S = d(AB)/AB + d(AD)/AD = (\partial v_1 / \partial x_1 + \partial v_2 / \partial x_2) dt$ .

2. En raisonnant de la même manière sur un élément de volume élémentaire cubique  $\delta\mathcal{V}$  soumis aux seuls termes non-diagonaux du tenseur  $S$ , on peut montrer qu'ils traduisent les déformations angulaires de  $\delta\mathcal{V}$ , c'est-à-dire les *déformations cisailantes*.

Plus précisément, reprenons le rectangle précédent en deux dimensions, et supposons à présent que le tenseur des déformations est symétrique mais que ses termes diagonaux sont nuls. Alors on a

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} dx_1 dt \hat{x}_2 ,$$

ce qui veut dire que le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a tourné pendant l'intervalle de temps  $dt$  d'un petit angle que l'on peut estimer comme  $\delta\alpha = (\partial v_2 / \partial x_1) dt$ . De même le vecteur  $\overrightarrow{AD}$  a tourné d'un angle  $\delta\beta = -(\partial v_1 / \partial x_2) dt$ . L'angle entre les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AD}$  a donc été modifié d'un petit angle  $\delta\gamma \simeq -\delta\alpha + \delta\beta$ , dont le taux de variation temporel est donc  $-(\partial v_2 / \partial x_1 + \partial v_1 / \partial x_2) = -2A_{1,2}$ .

## 2.4 Conservation de la masse – Équation de continuité

Une contrainte fondamentale à laquelle l'écoulement doit se conformer est que pour un volume de contrôle fixé, l'augmentation de masse dans le volume pendant un intervalle de temps donné doit être compensée par le flux de masse sortant (ou entrant) pendant cet intervalle de temps. Cette conservation de la masse peut être exprimée *sous forme intégrale*, c'est-à-dire à l'échelle du volume de contrôle, ou bien sous forme d'une équation différentielle reliant le champ de masse volumique  $\rho(\vec{x}, t)$  au champ de vitesses  $\vec{v}(\vec{x}, t)$ .

### 2.4.1 Bilan intégral

La masse contenue dans un volume fixe  $\mathcal{V}$  est l'intégrale sur le volume du champ de masse volumique :

$$m = \iiint_{\mathcal{V}} \rho(\vec{x}, t) d\mathcal{V} . \quad (2.18)$$

La variation de masse dans le volume  $\mathcal{V}$  dans l'intervalle de temps  $[t; t + dt]$  vaut  $(dm/dt) dt$ ,

$$\text{soit } \frac{dm}{dt} dt = \frac{d}{dt} \left( \iiint_{\mathcal{V}} \rho(\vec{x}, t) d\mathcal{V} \right) dt = \left( \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t) d\mathcal{V} \right) dt . \quad (2.19)$$

Cette variation de masse est équilibrée par la masse qui traverse la surface externe du volume (surface de contrôle  $\Sigma$ ) pendant le temps  $dt$ , c.a.d le débit massique à travers  $\Sigma$  multiplié par  $dt$ . Le débit massique s'exprime comme l'intégrale sur  $\Sigma$  du flux de masse  $\rho \vec{v}$ , et l'on choisit conventionnellement le signe + pour le flux lorsqu'il y a plus de fluide qui sort que de fluide qui rentre, c.a.d qu'on oriente le vecteur unitaire normal à la surface, noté  $\vec{n}$ , vers l'extérieur. Le flux de masse sortant s'écrit alors

$$\Phi_m = \iint_{\Sigma} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS , \quad (2.20)$$

grandeur qui peut être respectivement positive ou négative selon que le fluide sort effectivement de la surface ou y rentre, respectivement. La conservation de la masse est traduite par l'égalité

$$\frac{dm}{dt} dt = -\Phi_m dt ,$$

c'est-à-dire, d'après les relations (2.19) et (2.20) :

$$\left( \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} \right) dt = - \left( \iint_{\Sigma} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \right) dt . \quad (2.21)$$

## 2.4.2 Conditions aux limites qui en découlent pour la vitesse aux parois imperméables

Une paroi est *imperméable* si le débit de masse à travers elle est nulle. D'après l'expression du flux massique, cela entraîne

- dans le cas d'une paroi solide immobile, que la vitesse du fluide au voisinage de la paroi est parallèle à celle-ci,
- dans le cas d'une paroi solide mobile se déplaçant à la vitesse  $\vec{V}$ , que le différentiel de vitesse entre le fluide et la paroi,  $\vec{v} - \vec{V}$ , est parallèle à la paroi au voisinage de celle-ci.

## 2.4.3 Équation de continuité

L'intégrale de surface peut être transformée en intégrale de volume à l'aide du théorème de Green-Ostrogradski :

$$\left( \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} \right) dt = - \left( \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\rho \vec{v}) d\mathcal{V} \right) dt$$

$$\text{soit } \left( \iiint_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right] d\mathcal{V} \right) dt = 0 .$$

On en déduit que l'intégrale volumique est nulle ; comme cette nullité est valable quel que soit le volume de contrôle  $\mathcal{V}$  considéré, la relation sous l'intégrale est forcément identiquement nulle. Cela nous conduit à l'expression locale de la conservation de la masse, que l'on appelle parfois *équation de continuité* :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0} . \quad (2.22)$$

Cette équation traduit le fait qu'une variation locale de densité du fluide doit être compensée par une source de flux de masse  $\rho \vec{v}$  au même endroit.

**Remarque :** En développant la divergence dans l'équation de continuité sous la forme  $\rho \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho$ , on fait apparaître la dérivée particulaire de la masse volumique, ce qui fournit une autre forme de l'équation de continuité :

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0} . \quad (2.23)$$

## 2.4.4 Écoulement incompressible – Conservation du débit

Un écoulement est dit *incompressible* si les particules fluides ne subissent pas de variation de volume au cours de leur déplacement, c.a.d si  $d\rho/dt = 0$  partout et à tout moment. D'après la relation ci-dessus, cela revient à dire que la divergence du champ de vitesse est identiquement nulle dans tout le milieu et à tout moment :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{v} = 0} . \quad (2.24)$$

**Remarque :** Cette relation est bien cohérente avec la signification que l'on a trouvée pour  $\operatorname{div} \vec{v}$  au paragraphe 2.3.3, c.a.d le taux de variation relative de volume des particules fluides.

Un fluide est dit *incompressible* si sa masse volumique est constante, indépendamment des contraintes qui lui sont imposées :

$$\boxed{\rho = \text{Cte}} . \quad (2.25)$$

La conséquence sur le champ de vitesses est également la nullité de  $\operatorname{div} \vec{v}$ . Mais il faut remarquer que l'hypothèse de fluide incompressible est plus forte que celle d'écoulement incompressible : dans les deux cas la divergence du champ de vitesses est nulle, mais dans un écoulement incompressible la masse volumique peut être différente d'une ligne de courant à une autre.

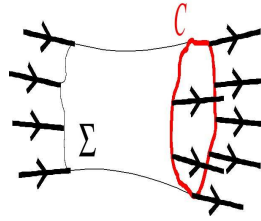


FIGURE 2.7 – Tube de courant.

**Remarque :** Dans la plupart des cas que vous rencontrerez, les liquides seront considérés comme incompressibles.

**Définition :** On appelle *tube de courant* un tube qui s'appuie sur des lignes de courant (voir Fig. 2.7); le flux de masse à travers la paroi latérale d'un tube de courant est par définition nul, car la vitesse du fluide est toujours parallèle à la paroi latérale du tube au voisinage de celle-ci.

Considérons l'écoulement d'un fluide incompressible le long d'un tube de courant stationnaire. La masse contenue dans une portion fixe du tube, limitée par deux sections  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , est invariante du fait de la stationnarité du tube : elle est égale au produit de la masse volumique (constante) et du volume du tube. L'équation intégrale de conservation de la masse nous dit que dans ces conditions la somme des flux massiques sortants à travers la surface limitant le volume considéré est nulle. Comme le flux massique à travers la section latérale du tube est nulle, cela revient à dire que la somme des flux massiques sortants à travers les sections  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  est nulle :

$$\iint_{\Sigma_1} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = - \iint_{\Sigma_2} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad \text{soit} \quad \boxed{\iint_{\Sigma_1} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = - \iint_{\Sigma_2} \vec{v} \cdot \vec{n} dS} \quad (\text{car } \rho = \text{Cte}) .$$

ce qui exprime l'égalité des débits à travers les deux sections.

**Conclusion :** Le débit à travers une section d'un tube de courant d'un écoulement stationnaire incompressible est indépendant de la section considérée : il est *conservé* le long du tube de courant.

En particulier, la surface latérale d'un tuyau est un tube de courant stationnaire particulier pour l'écoulement d'un fluide dans le tuyau. Donc si le fluide est incompressible, son débit est conservé le long du tuyau. En conséquence, si la section du tuyau se réduit, la vitesse moyenne du fluide doit augmenter pour conserver le débit. Un raisonnement similaire peut être adapté dans certaines conditions à l'écoulement dans une rivière.

## 2.5 Fonction courant

On a vu au paragraphe 2.4.4 qu'un écoulement est incompressible si et seulement si la divergence du champ de vitesse est identiquement nulle à tout instant. Cela entraîne que le champ de vitesse peut s'écrire comme le rotationnel d'un autre champ vectoriel que l'on notera  $\vec{\psi}$  :

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\psi} . \quad (2.26)$$

Si l'on parvient à exprimer l'équation traduisant le principe fondamental de la dynamique (voir chapitre (3)) en fonction de  $\vec{\psi}$  (au lieu de  $\vec{v}$ ), on obtient une équation unique qui exprime à elle seule à la fois la conservation de la masse et le théorème de la résultante dynamique. En outre, si l'écoulement possède certaines propriétés de symétrie, le champ vectoriel  $\vec{\psi}$  n'admet qu'une seule composante non nulle  $\psi$ , qui devient l'unique inconnue du problème. La fonction  $\psi(\vec{x}, t)$  est appelée *fonction courant*. Les deux types de géométrie pour lesquelles cette situation se présente sont les écoulements plans et les écoulements axisymétriques.

### 2.5.1 Écoulements plans

Les *écoulements plans* ou à *deux dimensions (2D)* sont ceux dont le champ de vitesse est entièrement contenu dans un plan, c'est-à-dire ne possède pas de composante dans la direction perpendiculaire au plan en

question. On peut choisir cette direction comme 3<sup>e</sup> axe du repère :  $\vec{v} = v_1 \hat{x}_1 + v_2 \hat{x}_2$ , de sorte que la condition de divergence nulle se réduit à

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 . \quad (2.27)$$

En posant

$$\begin{cases} v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \end{cases} , \quad (2.28)$$

on impose automatiquement la condition (2.27) et on a bien

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\psi} \quad \text{avec} \quad \vec{\psi} = \psi \hat{x}_3 . \quad (2.29)$$

### Propriétés de la fonction courant :

1. Les lignes iso-fonction courant ( $\psi = \text{Cte}$ ) coïncident avec les lignes de courant.

En effet, le champ de vitesse est perpendiculaire au gradient de  $\psi$  en tout point de l'espace, puisque

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \psi = v_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0 \quad \text{d'après (2.28).}$$

Comme  $\vec{\nabla} \psi$  est par définition perpendiculaire aux lignes iso- $\psi$ , ces dernières sont parallèles au champ de vitesse en tout point de l'espace, ce qui est la définition des lignes de courant. Ainsi la donnée de  $\psi(\vec{x}, t)$  fournit à la fois l'expression du champ de vitesse  $v(\vec{x}, t)$  (via la relation (2.28)) et l'expression mathématique des lignes de courant.

2. Considérons deux lignes de courant correspondant respectivement aux valeurs de fonction courant  $\psi_1$  et  $\psi_2$ , dans le plan  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ . Du fait de l'invariance du système par translation dans la direction définie par  $\hat{x}_3$ , ces deux lignes de courant et leurs translatées respectives par le vecteur  $-\Delta x_3 \hat{x}$  définissent une tube de courant (voir figure (2.8)). Soit  $\Sigma$  une section de ce tube de courant. Notons  $Q$  le débit à travers  $\Sigma$ ; il peut être calculé comme

$$Q = \iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \Delta x_3 \int_{\mathcal{L}} \vec{v} \cdot \vec{n} dl , \quad (2.30)$$

où  $\mathcal{L}$  est le chemin entre les deux lignes de courant qui est l'intersection entre  $\Sigma$  et le plan  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ . L'élément de déplacement le long de ce chemin est

$$\vec{dl} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \text{ce qui entraîne} \quad \vec{n} dl = \begin{pmatrix} dx_2 \\ -dx_1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Donc on peut réécrire l'équation (2.30) comme

$$Q = \Delta x_3 \int_{\mathcal{L}} (v_1 dx_2 - v_2 dx_1) = \Delta x_3 \int_{\mathcal{L}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 - \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) dx_1 \right) = \Delta x_3 \int_{\mathcal{L}} \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{dl} = \Delta x_3 \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi ,$$

$$\text{soit} \quad \boxed{\frac{Q}{\Delta x_3} = \psi_2 - \psi_1} . \quad (2.31)$$

**Conclusion :** La différence entre les deux valeurs de fonction courant est le débit à travers la section  $\Sigma$  par unité de longueur dans la direction normale au plan de l'écoulement.

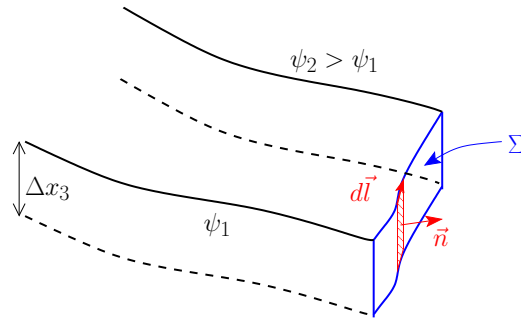


FIGURE 2.8 – Tube de courant d’un écoulement plan, délimité par deux lignes de courant dans le plan  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$  et leurs translatées par  $-\Delta x_3 \hat{x}_3$ .

**Expression de la fonction courant d’un écoulement plan en coordonnées polaires :** À partir de l’expression de la divergence en repère polaire on constate que l’incompressibilité est vérifiée si les coordonnées radiale  $v_r$  et orthoradiale  $v_\theta$  de la vitesse sont liées à une fonction courant par les relations

$$\begin{cases} v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases} \quad (2.32)$$

**Remarque :** Pour les écoulements plans la fonction courant s’exprime en  $\text{m}^2/\text{s}$ .

## 2.5.2 Écoulements axisymétriques

Ce sont des écoulements pour lesquels il existe un axe fixe tel que l’écoulement soit invariant par symétrie axiale par rapport à cet axe. Par exemple l’écoulement laminaire autour d’une sphère qui se déplace à vitesse uniforme dans un fluide qui est au repos loin de la sphère peut être étudié dans le référentiel de la sphère, où il est stationnaire et axisymétrique : les lignes de courant sont toutes contenues dans un plan diamétral de la sphère, et sont identiques dans tous les plan diamétraux.

Dans cette configuration de l’écoulement autour d’une sphère, le système est à symétrie sphérique : on peut choisir un repère sphérique centré sur le centre de la sphère et dont l’axe  $x_3$  est défini par la vitesse du fluide loin de la sphère ; la géométrie de l’écoulement dans ce repère est alors invariante par translation de l’angle azimuthal. Dans d’autres cas on préférera utiliser un repère cylindrique. L’expression de la fonction courant sera différente selon le type de repère utilisé.

**Problème à symétrie cylindrique :** Du fait de l’axisymétrie, on peut définir un repère cylindrique pour lequel le champ de vitesse n’a pas de composante orthoradiale et pas de dépendance de la vitesse vis-à-vis de l’angle polaire, soit :

$$\begin{cases} v_\theta = 0 \\ \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial v_{x_3}}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

L’incompressibilité de l’écoulement se traduit dans ce cas par

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial (r v_3)}{\partial x_3} = 0, \quad (2.34)$$

qui est automatiquement vérifiée si le champ de vitesse est relié à une fonction courant par les relations

$$\begin{cases} v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \\ v_3 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases} \quad (2.35)$$

**Problème à symétrie sphérique :** L'axisymétrie impose que l'on puisse définir un repère sphérique pour lequel le champ de vitesse à une composante azimuthale  $v_\varphi$  nulle et aucune dépendance vis-à-vis de l'angle azimuthal  $\varphi$ . La condition d'incompressibilité se réduit alors à

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial(r^2 \sin \theta v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r \sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} = 0, \quad (2.36)$$

ce qui conduit à la définition suivante pour la fonction courant :

$$\begin{cases} v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases} \quad (2.37)$$

**Remarque :** Pour les écoulements axisymétriques la fonction courant s'exprime en  $\text{m}^3/\text{s}$ . Elle n'a donc pas la même dimension que pour les écoulements plans.