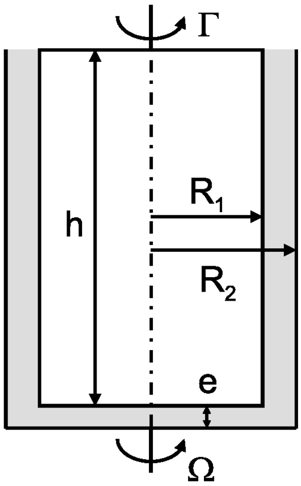
TD 4 - Ecoulements incompressibles de fluides visqueux

Exercice 1 : Viscosimètre de Couette

Le viscosimètre de Couette est un appareil constitué de deux cylindres coaxiaux. L'espace entre les deux cylindres est rempli d'un fluide newtonien dont on veut mesurer la viscosité η. Le cylindre extérieur, de rayon R_2, et mis en rotation à la vitesse angulaire Ω. Le cylindre intérieur, de rayon R_1, est entraîné par les forces de viscosité et est maintenu immobile par l'application d'un couple Γ.



1. En négligeant les effets de bord au fond et à la surface supérieure du fluide, montrer que le profil des vitesses entre les deux cylindres est de la forme :

$$\vec{v} = \left(ar + \frac{b}{r} \right) \hat{e}_\theta.$$

Déterminer a et b en fonction de Ω, R_1 et R_2 en appliquant les conditions aux limites.

2. Exprimer les contraintes s'exerçant sur le cylindre intérieur. En déduire le couple Γ à appliquer pour maintenir ce cylindre immobile, en fonction de η, Ω, R_1 et R_2.
3. Au fond de l'appareil, les cylindres sont séparés par un interstice de hauteur $e \ll R_1$. Quel est le couple exercé sur la face inférieure du cylindre intérieur par les forces de viscosité ? Pour un viscosimètre de dimensions $R_1 = 5{,}0$ cm, $R_2 = 5{,}1$ cm, $h = 20$ cm et $e = 1$ mm, quelle erreur commet-on sur la mesure de viscosité si on néglige cette contribution ?

Exercice 2 : Ecoulement dans un cylindre

On impose une différence de pression ΔP entre l'entrée et la sortie d'un cylindre de rayon R et de longueur L. Montrer que la vitesse moyenne de l'écoulement à travers une section perpendiculaire à sa direction est proportionnelle au gradient de pression.

A faire en devoir maison (à rendre le 5 novembre)

Exercice 3 : Ecoulement de cisaillement

On considère un fluide confiné entre une paroi horizontale fixe (définissant l'altitude $x_3 = 0$) et une plaque horizontale se déplaçant à la vitesse $\vec{U} = U\hat{x}_1$ par rapport à la paroi et parallèlement à elle (à $x_3 = d$). Les dimensions horizontales du système sont infinies.

1. En prenant en compte les symétries du problème, quelles hypothèses peut-on faire sur le champ (eulérien) de vitesses du fluide ?
2. Le fluide est incompressible. Qu'en découle-t-il ?
3. Projeter l'équation de Navier-Stokes sur les 3 axes du référentiel. En déduire les formes possibles des dépendances en espace des champs de pression et de vitesse.
4. Sachant que le fluide devant et derrière la plaque est en équilibre de pression avec l'atmosphère, et en tenant compte des conditions de contact, quelle est la forme du profil vertical des vitesses ?
5. En comparant avec le résultat de l'exercice 2, peut-on deviner une loi générale reliant ces 2 quantités ?
6. A cette configuration, dite *de Poiseuille plan*, correspond une configuration *de Couette* dans laquelle le fluide est limité par 2 cylindres concentriques (de diamètres respectifs R_1 et R_2, dont l'un est fixe et l'autre tourne). Montrer que si l'on impose une vitesse de rotation fixée au cylindre intérieur, par exemple, la mesure du couple de frottement sur ce cylindre fournit une mesure de la viscosité du fluide.

Exercice 4 : Ecoulement entre deux plaques parallèles

Dans la même géométrie que l'exercice 1, les deux plaques sont à présent immobiles et l'on force l'écoulement du fluide entre elles en imposant une différence de pression ΔP entre "l'entrée" de l'espace défini par les deux plaques et sa sortie.

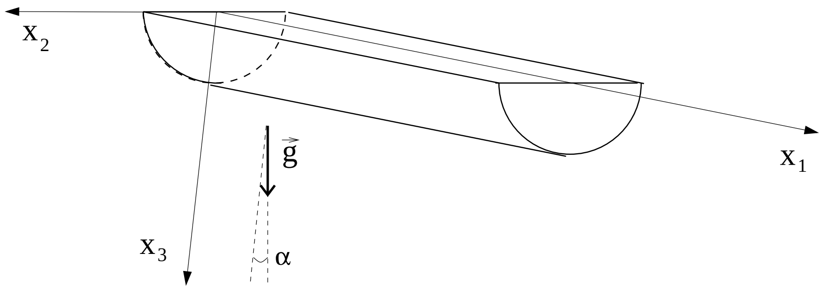
1. En reprenant les étapes du raisonnement de l'exercice précédent, montrer que le profil vertical de vitesses est parabolique.
2. Calculer la vitesse moyenne de l'écoulement à travers une section perpendiculaire à sa direction. Montrer qu'elle est proportionnelle au gradient de pression.

Exercice 5 : Superposition des configurations des exercices 3 et 4

Si on considère la configuration de l'exercice 1, et qu'on rajoute une différence de pression longitudinale, quel sera le profil de vitesses ? Comment le calculer aisément ?

Exercice 6 : Écoulement d'un glacier.

On considère l'écoulement permanent d'un fluide newtonien visqueux, incompressible, le long d'une canalisation cylindrique ouverte de longueur infinie, inclinée d'un angle α sur l'horizontale. La section du canal est un demi-cercle de rayon R. La surface libre du fluide se situe à $x_3 = 0$ et est à pression uniforme p_0. On suppose que la vitesse est en tout point parallèle à Ox_1 et qu'elle ne dépend pas de x_1.



1. Donner les équations gouvernant la dynamique des champs de vitesse et de pression.
2. Écrire les conditions aux limites aux différentes interfaces.
3. Calculer la distribution des vitesses et des pressions.
4. Peut-on retrouver la forme de l'expression du champ de vitesse à partir de l'analyse dimensionnelle ?
5. On cherche à évaluer le temps mis par un objet, tombé dans une crevasse en un point donné d'un glacier, pour réapparaître à son front. Pour cela, on construit un modèle réduit du glacier semblable à l'original et correspondant géométriquement à un écoulement du type de celui présenté ci-dessus. Le modèle est construit au $1000^{ème}$ pour les dimensions géométriques. La pente est accentuée d'un facteur 10 (c'est à dire $\sin\alpha' = 10 \sin\alpha$). On utilise, au lieu de la glace, de la glycérine dont la masse volumique est identique et la viscosité 10^6 fois plus faible. On observe sur la maquette que l'objet réapparaît au bout de 48h, à quel délai de réapparition cela correspond-il réellement pour le glacier ?

Formulaire

Pour un fluide newtonien incompressible de masse volumique ρ et de viscosité η, l'équation locale de conservation de la masse, ou équation de continuité, s'écrit :

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0,$$

le tenseur des contraintes dans le fluide vaut :

$$\bar{\bar{\sigma}} = -p\bar{\bar{1}} + \eta(\overline{\overline{\mathrm{grad}\,v}} + {}^t\overline{\overline{\mathrm{grad}\,v}}),$$

et l'équation de Navier–Stokes (forme locale de la conservation de quantité de mouvement) s'écrit :

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}\right] = \rho\vec{f} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p + \eta\Delta\vec{v}.$$

En **coordonnées cartésiennes** (x, y, z), l'équation de continuité devient :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

les composantes du tenseur des contraintes sont :

$$\sigma_{xx} = -p + 2\eta\frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \sigma_{yy} = -p + 2\eta\frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \sigma_{zz} = -p + 2\eta\frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right), \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right),$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \eta\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right),$$

et les composantes de l'équation de Navier–Stokes selon x, y et z sont :

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) &= \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)\\
\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) &= \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)\\
\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) &= \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right).
\end{aligned}$$

En **coordonnées cylindriques** (r, θ, z), l'équation de continuité devient :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

les composantes du tenseur des contraintes sont :

$$\sigma_{rr} = -p + 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = -p + 2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r}{r}\right), \quad \sigma_{zz} = -p + 2\eta\frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right), \quad \sigma_{rz} = \sigma_{zr} = \eta\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right),$$

$$\sigma_{z\theta} = \sigma_{\theta z} = \eta\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}\right),$$

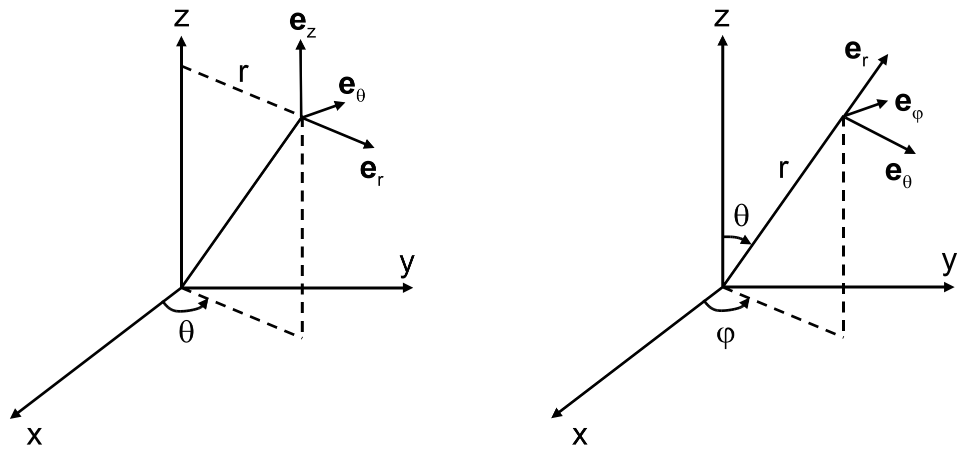


FIGURE 1 – Schéma des coordonnées cylindriques (à gauche) et sphériques (à droite).

et les composantes de l'équation de Navier–Stokes selon r, θ et z sont :

$$\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\theta^2}{r}\right)\\
=\ &\rho f_r-\frac{\partial p}{\partial r}+\eta\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-\frac{v_r}{r^2}\right)\\
&\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{v_r v_\theta}{r}\right)\\
=\ &\rho f_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\eta\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta}{r^2}\right)\\
&\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\\
=\ &\rho f_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\eta\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right).
\end{aligned}$$

En **coordonnées sphériques** (r, θ, φ), l'équation de continuité devient :

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{2v_r}{r}+\frac{v_\theta\cot\theta}{r}=0,$$

les composantes du tenseur des contraintes sont :

$$\sigma_{rr}=-p+2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r},\quad \sigma_{\theta\theta}=-p+2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r}{r}\right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=-p+2\eta\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{v_r}{r}+\frac{v_\theta\cot\theta}{r}\right),\quad \sigma_{r\theta}=\sigma_{\theta r}=\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right),$$

$$\sigma_{r\varphi}=\sigma_{\varphi r}=\eta\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}-\frac{v_\varphi}{r}\right),$$

$$\sigma_{\theta\varphi}=\sigma_{\varphi\theta}=\eta\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta}-\frac{v_\varphi\cot\theta}{r}\right),$$

et les composantes de l'équation de Navier–Stokes selon r, θ et φ sont :

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}-\frac{v_\theta^2+v_\varphi^2}{r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\eta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rv_r)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\theta^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\varphi^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{2v_r}{r^2}-\frac{2v_\theta\cot\theta}{r^2}\right]$$
$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\varphi^2\cot\theta}{r}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\eta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rv_\theta)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\varphi^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right]$$
$$\rho\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta}+\frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}+\frac{v_\theta v_\varphi\cot\theta}{r}\right)$$
$$=\quad -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\varphi}+\eta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rv_\varphi)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial\varphi^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta}\right.$$
$$\left.+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}-\frac{v_\varphi}{r^2\sin^2\theta}\right].$$