

Devoir à la maison de Mécanique des Milieux Continus

Yves Méheust

À rendre pour le 10/10/2016

On prendra bien soin de justifier toutes les équations posées.

Question de cours 1 : Opérateurs gradient et divergence.

1. Donner la définition de l'opérateur gradient d'un champ scalaire a , en coordonnées cartésiennes. Quelle est la signification de cet opérateur ?
2. Donner la définition de l'opérateur divergence d'un champ vectorielle $\vec{b}$, en coordonnées cartésiennes. Quelle est la signification de cet opérateur ?
3. Expression des opérateurs gradient et divergence en repère cylindrique :
 - (a) Rappeler la définition du repère cylindrique (avec un schéma). Comment les coordonnées cylindriques sont-elles reliées aux coordonnées cartésiennes ?
 - (b) Comment les vecteurs unitaires $\hat{r}$ et $\hat{\theta}$ s'expriment-ils en fonction des vecteurs de la base cartésienne ?
 - (c) Réciproquement, comment les vecteurs unitaires $\hat{x}_1$ et $\hat{x}_2$ du repère cartésien s'expriment-ils en fonction de $\hat{r}$ et $\hat{\theta}$?
 - (d) Comment les projections de $\overrightarrow{\text{grad}} a$ sur les vecteurs de la base cartésienne s'expriment-elles en fonction des variables du repère cylindrique ?
 - (e) En déduire l'expression de $\overrightarrow{\text{grad}} a$ dans le repère cylindrique.
 - (f) Trouver de même l'expression de $\text{div } \vec{b}$ dans le repère cylindrique.
4. Expression des opérateurs gradient et divergence en repère sphérique :
 - (a) Rappeler la définition du repère sphérique (avec un schéma). Comment les coordonnées sphériques sont-elles reliées aux coordonnées cartésiennes ?
 - (b) Comment les vecteurs unitaires $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ et $\hat{\phi}$ s'expriment-ils en fonction des vecteurs de la base cartésienne ?
 - (c) Réciproquement, comment les vecteurs unitaires du repère cartésien s'expriment-ils en fonction de $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ et $\hat{\phi}$?
 - (d) Comment les projections de $\overrightarrow{\text{grad}} a$ sur les vecteurs de la base cartésienne s'expriment-elles en fonction des variables du repère sphérique ?
 - (e) En déduire l'expression $\overrightarrow{\text{grad}} a$ dans le repère sphérique.
 - (f) Trouver de même l'expression de $\text{div } \vec{b}$ dans le repère sphérique.

Question de cours 2 : Fonctions courants

1. Qu'est-ce qu'une fonction courant ? À quoi cela sert-il de manière générale ?
2. Fonction courant d'un écoulement plan en coordonnées cartésiennes :
 - (a) Donner la définition de la fonction courant (en fonction des coordonnées v_1 et v_2 de la vitesse).
 - (b) Quel est le lien entre fonction courant et lignes de courant ? Pourquoi ?
 - (c) Expliquer comment la fonction courant permet de calculer le débit dans un tube de courant.
3. Fonction courant d'un écoulement axisymétrique :
 - (a) Quelles sont les particularités du champ de vitesse d'un écoulement axisymétrique ?
 - (b) Expression de la fonction courant en coordonnées sphériques :

Sachant que l'expression de la divergence en coordonnées sphériques est

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = 0, \quad (1)$$

donner la relation entre la fonction courant et les coordonnées de la vitesse.

Exercice 1 :

On étudie deux écoulements plans stationnaires dont les champs de vitesse ont pour expression

$$\begin{pmatrix} 3x_1 x_2^2 \\ -3x_1^2 x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -3x_1^2 x_2 \\ 3x_1 x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

1. Ces écoulements sont-ils stationnaires ? Sont-ils uniformes ?
2. Lignes de courant :
 - (a) Rappeler la définition d'une ligne de courant. Dans le cas général, quelles équations faut-il poser pour déterminer les lignes de courant ?
 - (b) Déterminer l'équation cartésienne et la forme des lignes de courant du fluide pour chacun des écoulements définis ci-dessus.
3. Trajectoires :
 - (a) Rappeler la définition d'une trajectoire. Dans le cas général, quelles équations faut-il poser pour déterminer les trajectoires des particules fluides ?
 - (b) Y a-t-il un lien entre les trajectoires et les lignes de courant pour chacun des deux écoulements ? Déterminer les équations paramétriques $(x_1(t), x_2(t))$ de la trajectoire de la particule fluide P dont les coordonnées sont $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, 0)$ à l'instant $t = 0$, pour chacun des deux écoulements.
4. Vitesses et accélérations :
 - (a) Exprimer la vitesse instantanée de la particule fluide P et son accélération *pour le second écoulement* à partir de la description lagrangienne de la question 3.
 - (b) Calculer la vitesse et l'accélération d'une particule fluide dans le second écoulement à partir de l'expression eulérienne donnée en tête d'énoncé. Comparer ce résultat à celui de la question 4.(a).

Exercice 2 :

On considère l'écoulement dont le champ de vitesse s'écrit en coordonnées cartésiennes (hormis à l'origine du repère) :

$$\begin{cases} v_1 = -\frac{a x_2}{x_1^2 + x_2^2} \\ v_2 = \frac{a x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ v_3 = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

où a est un paramètre non nul.

1. Cet écoulement est-il stationnaire ? Est-il uniforme ? Est-il irrotationnel ?
2. Déterminer les trajectoires des particules fluides.
3. Comment varie le module de la vitesse en fonction de la distance à l'origine ?
4. Conclure sur la nature de l'écoulement.

Formulaire :

1. Cosinus et sinus de la somme de deux angles :

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \quad (4)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b) \quad (5)$$

2. Dérivée de la fonction Atan :

$$\text{Atan}'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad (6)$$