Valeurs spéciales de paramètres de diagrammes de Diamond

Yongquan HU

Résumé. — Soit L une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ et $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ une représentation continue réductible et suffisamment générique. Suivant la démarche de [6], on montre comment relier le type d'extension de $\overline{\rho}$ à certains paramètres définissant les diagrammes de Diamond associés à $\overline{\rho}$.

Table des matières

1 Introduction

Soient p un nombre premier et L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ avec $\mathcal{O}_L$ son anneau des entiers. La correspondance de Langlands locale modulo p pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est maintenant bien comprise ([1], [2], [11]), mais celle pour $\mathrm{GL}_2(L)$ lorsque $L \neq \mathbb{Q}_p$ reste encore largement mystérieuse. Dans ce cas un des obstacles principaux est qu'il existe beaucoup plus de représentations (modulo p ou p-adiques) de $\mathrm{GL}_2(L)$ que de représentations de dimension 2 (modulo p ou p-adiques) de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$. Par exemple, lorsque L est non ramifiée sur $\mathbb{Q}_p$, inspirés par les travaux de Buzzard, Diamond et Jarvis ([9]), Breuil et Paskunas ont construit des représentations lisses admissibles sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ de $\mathrm{GL}_2(L)$ satisfaisant une certaine condition sur les $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$-socles (voir [8]). Mais cela est encore loin de pouvoir isoler une unique représentation comme démontre l'auteur [13].

Pourtant, en fixant une représentation continue de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$, on espère pouvoir trouver des "bonnes" conditions restrictives du coté $\mathrm{GL}_2(L)$, supplémentaires à celle sur socle, pour diminuer la sélection. Jusqu'au présent (à la connaissance de l'auteur), les conditions que l'on a trouvé vivent toutes dans les diagrammes de Diamond associés à la représentation galoisienne (donc toujours pour L non ramifiée). La première condition de ce genre a été définie dans [4], ayant l'inspiration de rendre bien se comporter un possible foncteur de Colmez généralisé ([11],[17]).

Une autre condition est considérée dans l'article récent de Breuil et Diamond [6], ce qui fait aussi l'objet de l'article présent. Pour expliquer plus clairement notre situation, nous rappelons brièvement la construction de diagrammes de Diamond d'après [8]. Supposons L non ramifiée sur $\mathbb{Q}_p$ et fixons une représentation continue $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ que l'on suppose suffisamment générique (à préciser dans le texte). A $\bar{\rho}$ sont associés un ensemble de poids de Serre noté $\mathcal{D}(\overline{\rho})$ ainsi que une $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$-représentation $D(\overline{\rho})$ de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ dont le socle est exactement $\oplus_{\tau\in\mathcal{D}(\overline{\rho})}\tau$ et qui est maximale par rapport à une certaine condition de multiplicité 1. Notons $I(\mathcal{O}_L)$ le sous-groupe d'Iwahori de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$ et $I_1(\mathcal{O}_L)$ le pro-p-sous-groupe de $I(\mathcal{O}_L)$. En tant que $I(\mathcal{O}_L)$-représentation, l'espace des $I_1(\mathcal{O}_L)$-invariants de $D(\overline{\rho})$ est une somme directe de caractères, qui apparaissent par paires stables sous la conjugaison par $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)$, de telle sorte que l'on puisse munir une action de $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)$ dessus, mais de plusieurs façons possibles. Un diagramme de Diamond associé à $\overline{\rho}$ est alors simplement l'injection naturelle $D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)} \hookrightarrow D(\overline{\rho})$ (avec une action de $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sur $D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ choisie).

On peut classifier les possibles actions de $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sur $D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ (à isomorphisme près) à l'aide de certains paramètres (voir §6). Mais dès que $\overline{\rho}$ est réductible *non scindée*, la donnée de $\mathcal{D}(\overline{\rho})$, ou de $D(\overline{\rho})$, contient moins d'information que la représentation $\overline{\rho}$ de départ. Nous voulons donc relier la classe d'isomorphisme de $\overline{\rho}$ aux paramètres définissant l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sur $D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$.

Décrivons les paramètres qui nous intéressent dans cet article. Rappelons que $D(\overline{\rho})$ se décompose sous la forme $\oplus_{\tau\in\mathcal{D}(\overline{\rho})}D_\tau(\overline{\rho})$ où $D_\tau(\overline{\rho})$ est l'unique facteur direct de $D(\overline{\rho})$ de socle τ. Soit χ un caractère de $I(\mathcal{O}_L)$ apparaissant sur $D_\tau(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ et soit $v \in D_\tau(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ un vecteur propre de caractère χ. Alors sous l'action d'un élément dans $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$ d'une forme particulière mais explicite (voir la proposition 2.6), v engendre un vecteur, noté w_1 pour l'instant, dans $\tau^{I_1} \hookrightarrow D_\tau(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$. Si de plus χ^s, la conjugaison par $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)$ de χ, apparaît aussi sur $D_\tau(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$, on obtient un autre vecteur non nul w_2 de τ^{I_1} à partir de $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)v$. Comme τ^{I_1} est de dimension 1, w_1 et w_2 diffèrent par un scalaire non nul $x(\chi) \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ qui ne dépend pas du choix de v. C'est par définition le paramètre associé à χ. En général, il existe des diagrammes de Diamond avec $x(\chi)$ prenant n'importe quelle valeur de $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$. Dans [6], lorsque χ et χ^s apparaissent tous les deux sur la "première" composante $D_{\tau(\emptyset)}(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ de $D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$, une valeur de $x(\chi)$ d'intérêt "particulier" est isolée. Dans l'article présent, nous traitons le cas général suivant la démarche de [6]. On définit aussi des paramètres cycliques comme dans [4] et on montre que si $|\mathcal{D}(\overline{\rho})| = 1$ les valeurs spéciales que l'on trouve sont exactement celles prédites dans [4, §6].

Les énoncés des résultats principaux de l'article ayant besoin d'introduire trop de notations, nous préférons de ne pas les copier dans cette introduction mais renvoyer aux théorèmes 4.7 et 5.5 pour plus de détails. Expliquons quand même d'où vient l'idée. La représentation $\overline{\rho}$ admet plusieurs déformations potentiellement Barsotti-Tate qui deviennent cristallines sur une extension modérément ramifiée de L et dont le type d'inertie est associé à χ, ce qui correspondent par la correspondance de Langlands locale classique à des séries principales modérément ramifiées de $\mathrm{GL}_2(L)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Soit Π une telle série principale. En espérant vraie une compatibilité local-global modulo p, la donnée de $\overline{\rho}$ devrait correspondre à celle de la réduction d'un certain réseau $\mathrm{GL}_2(L)$-invariant de Π. En général les réseaux $\mathrm{GL}_2(L)$-invariants de Π (s'ils existent) sont très difficiles à décrire, mais nous somme heureux que nous n'avons pas besoin de les décrire explicitement et que le paramètre en question ne dépend pas du choix de réseau, à condition qu'il se trouve dans sa réduction modulo p.

Le plan de l'article est le suivant. Au §2, on fait des rappels et on démontre la proposition 2.1 où l'on détermine la condition exacte sur $\chi \in D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ pour que le paramètre associé soit défini. Au §3, on calcule la représentation galoisienne résiduelle associée à un module fortement divisible avec donnée de descente modérément ramifiée. Toute cette partie est juste une relecture des calculs dans [5]. On montre le résultat principal au §4. Au §5, on définit et calcule des paramètres cycliques analogues à ceux définis dans [4]. Enfin au §6, on détermine le nombre de paramètres pour classifier les diagrammes de Diamond associés à $\overline{\rho}$.

Introduisons les notations générales de l'article.

Dans tout le texte L désigne une extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de degré f, d'anneau des entiers $\mathcal{O}_L$ et E désigne une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ (qui sera le corps des coefficients) d'anneau des entiers $\mathcal{O}_E$ et de corps résiduel k_E. On suppose que E est suffisamment grand tel que $|\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L,E)| = f$. On note $q = p^f$ et on identifie le corps résiduel de L avec $\mathbb{F}_q$. On note $\varphi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$ le Frobenius $x \mapsto x^p$. On normalise la valuation p-adique val sur L ou E par $\mathrm{val}(p) = 1$ et on pose $|\cdot| = \frac{1}{q^{\mathrm{val}(\cdot)}}$.

On fixe une fois pour toutes σ_0 un plongement de $\mathbb{F}_q$ dans k_E, de sorte que $\{\sigma_0 \circ \varphi^i\}_{0\leq i\leq f-1}$ forment les plongements distincts de $\mathbb{F}_q$ dans k_E. On normalise l'application de réciprocité de la théorie du corps de classes local en envoyant les Frobenius géométriques sur les uniformisantes, via laquelle on voit tout caractère de $L^\times$ comme un caractère de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$.

On a un isomorphisme canonique :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}(L[\sqrt[p^f-1]{-p}/L]) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{F}_q^\times \\ g & \mapsto & \overline{\frac{g(\sqrt[p^f-1]{-p})}{\sqrt[p^f-1]{-p}}} \end{array}$$

via lequel on voit implicitement tout caractère de $\mathbb{F}_q^\times$ comme un caractère du groupe $\mathrm{Gal}(L[\sqrt[p^f-1]{-p}]/L)$ ou du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$. On note $\omega_{\sigma_0} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L) \to \mathbb{F}_q^\times \overset{\sigma_0}{\hookrightarrow} k_E^\times$ le caractère induit. On note ω le caractère cyclotomique modulo p (via $\mathbb{F}_p \hookrightarrow k_E$) et $\mathrm{nr}(x)$ le caractère non ramifié de $L^\times$ envoyant p sur x (où $x \in k_E^\times$ ou $E^\times$).

On rappelle qu'un poids de Serre, ou un poids simplement, est une représentation absolument irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$, ou de manière équivalente de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$, sur k_E. A isomorphisme près, un poids est de la forme

$$\left(\otimes_{i=0}^{f-1}(\mathrm{Sym}^{r_i} k_E^2)^{\sigma_0\circ\varphi^i}\right) \otimes \det{}^a$$

où $r_i \in \{0, \cdots, p-1\}$, $a \in \{0, \cdots, q-2\}$ et où $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ agit sur $(\mathrm{Sym}^{r_i} k_E^2)^{\sigma_0\circ\varphi^i}$ via $\sigma_0 \circ \varphi^i : \mathbb{F}_q \hookrightarrow k_E$ et via l'action naturelle de $\mathrm{GL}_2(k_E)$ sur la base canonique de k_E^2. On écrira $(r_0, \cdots, r_{f-1}) \otimes \det^a$ pour cette représentation.

On écrit $\mathcal{S}$ pour l'ensemble $\{0, \cdots, f-1\}$ et on définit une application bijective δ de l'ensemble des parties J de $\mathcal{S}$ dans lui-même en posant $j \in \delta(J)$ si et seulement si $j+1 \in J$.

On note $B(L) \subset \mathrm{GL}_2(L)$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures et $I(\mathcal{O}_L) \subset \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$ (resp. $I_1(\mathcal{O}_L) \subset \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$) le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures (resp. unipotents) modulo p. Si χ est un caractère lisse de $I(\mathcal{O}_L)$ dans $k_E^\times$, on note χ^s le caractère conjugué par $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)$, i.e. $\chi^s(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ pc & d \end{smallmatrix}\right)) := \chi(\left(\begin{smallmatrix} d & c \\ pb & a \end{smallmatrix}\right))$ si $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ pc & d \end{smallmatrix}\right) \in I(\mathcal{O}_L)$. On note $\overline{\sigma}(\chi)$ le k_E-espace vectoriel $\mathrm{Ind}_{I(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)}\chi$ des fonctions $f : \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L) \to k_E$ telles que $f(gg') = \chi(g)f(g')$ (pour $g \in I(\mathcal{O}_L)$ et $g' \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$) muni de l'action à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$ par translation à droite (notons que cette action se factorise par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$, car χ est toujours trivial sur $I_1(\mathcal{O}_L)$). De même on définit l'induite $\mathrm{Ind}_{B(L)}^{\mathrm{GL}_2(L)}\chi$ pour un caractère lisse χ de $B(L)$ dans $E^\times$.

Enfin on remarque que bien que l'article est une continuation de [6], on suivra plutôt les notations de [5].

Remerciement : Je remercie Christophe Breuil pour avoir porté ce problème à mon attention ainsi que ses nombreuses suggestions. Je remercie l'institut Max-Planck de Mathématiques et le centre BICMR à Pékin pour leur accueil pendant la rédaction de l'article.

2 Rappels sur diagrammes de Diamond

On fait des rappels de [8] et [5] sur les diagrammes de Diamond et on établit certains résultats combinatoires qui seront utilisés dans la suite.

On fixe une représentation continue réductible $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ de la forme :

$$\overline{\rho} = \begin{pmatrix} \mathrm{nr}(\xi)\omega_{\sigma_0}^{\sum_{j=0}^{f-1} p^j(r_j+1)} & * \\ 0 & \mathrm{nr}(\xi^{-1}) \end{pmatrix} \tag{1}$$

où $\xi \in k_E^\times$, $r_j \in \{0, \cdots, p-3\}$ et $(r_j)_j \neq (0, \cdots, 0), (p-3, \cdots, p-3)$ (c'est la condition de "généricité" dans [8, §11]). À $\overline{\rho}$ est associé dans [9] un ensemble de poids de Serre que l'on note $\mathcal{D}(\overline{\rho})$. Cet ensemble admet une description explicite à l'aide d'un certain sous-ensemble de $\{0, \cdots, f-1\}$ que l'on rappelle maintenant suivant la reformulation dans [5].

Grâce à la condition de généricité, $\overline{\rho}$ est dans la catégorie de Fontaine-Laffaille ([12]), donc s'écrit sous la forme :

$$\overline{\rho} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^{\cdot},\varphi_{\cdot}}(M, A_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p)$$

où M est un φ-module filtré de Fontaine-Laffaille uniquement déterminé par $\overline{\rho}$, A_{cris} est l'anneau de périodes de Fontaine pour les représentations cristallines entières, et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^{\cdot},\varphi_{\cdot}}$ indique qu'on prend les morphismes qui respectent les filtrations et qui commutent à $\varphi_{\cdot}$ (cf. [12] pour les détails). On peut exprimer M sous la forme suivante (cf. [6, §2.1]) :

$$M = M^{\sigma_0} \times \cdots \times M^{\sigma_0\circ\varphi^{-(f-1)}}, \quad M^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} = k_E e^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} \oplus k_E f^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}$$

avec la filtration (on écrit $M^j = M^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}$, $e^j = e^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}$ et $f^j = f^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}$ pour simplifier les notations et on convient que $(f-1)+1 = 0$) :

$$\begin{cases} \mathrm{Fil}^i M^j &= M^j & \text{si} \quad i \leq 0 \\ \mathrm{Fil}^i M^j &= k_E f^j & \text{si} \quad 1 \leq i \leq r_{f-j}+1 \\ \mathrm{Fil}^i M^j &= 0 & \text{si} \quad i \geq r_{f-j}+2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \varphi(e^j) &= \sqrt[f]{\xi} e^{j+1} \\ \varphi_{r_{f-j}+1}(f^j) &= \sqrt[f]{\xi}^{-1}(f^{j+1} + \mu_j e^{j+1}) \end{cases}$$

où $\sqrt[f]{\xi}$ est un choix de racine f-ième de ξ dans k_E (que l'on suppose exister quitte à agrandir E) et $\mu_j \in k_E$ pour tout j. Les choix faits pour M comme ci-dessus ne sont pas uniques, mais on vérifie que l'ensemble défini par

$$J_{\overline{\rho}} := \big\{ j \in \{0, \cdots, f-1\},\ \mu_{f-j} = 0 \big\}. \tag{2}$$

ne dépend que de $\overline{\rho}$. De plus, on a $J_{\overline{\rho}} = \mathcal{S}$ si et seulement si $\overline{\rho}$ est scindée.

Donnons une description explicite pour l'ensemble $\mathcal{D}(\overline{\rho})$ comme suit. Soit $(x_0, \cdots, x_{f-1})$ f variables. On note $\mathcal{D}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ l'ensemble des f-uplets $\tau = (\tau_0(x_0), \cdots, \tau_{f-1}(x_{f-1}))$ tels que :

(i) $\tau_i(x_i) \in \{x_i, x_i+1, p-2-x_i, p-3-x_i\}$

(ii) si $\tau_i(x_i) \in \{x_i, x_i+1\}$, alors $\tau_{i+1}(x_{i+1}) \in \{x_{i+1}, p-2-x_{i+1}\}$

(iii) si $\tau_i(x_i) \in \{p-2-x_i, p-3-x_i\}$, alors $\tau_{i+1}(x_{i+1}) \in \{p-3-x_{i+1}, x_{i+1}+1\}$

(iv) $\tau_i(x_i) \in \{p-3-x_i, x_i+1\}$ implique $i \in J_{\overline{\rho}}$

où l'on convient que $x_f = x_0$ et $\tau_f(x_f) = \tau_0(x_0)$. Notons que les conditions (i)-(iii) entraînent $\tau_0(x_0) \in \{x_0, p-3-x_0\}$ si $f=1$. Avec ces notations, on a la description suivante pour $\mathcal{D}(\overline{\rho})$ (voir [5, Prop. A.3] ou [10]) :

$$\mathcal{D}(\overline{\rho}) = \big\{(\tau_0(r_0), \cdots, \tau_{f-1}(r_{f-1})) \otimes \det{}^{e(\tau)(r_0,\cdots,r_{f-1})},\ \tau \in \mathcal{D}(x_0, \cdots, x_{f-1})\big\}, \tag{3}$$

où $e(\tau)(x_0, \cdots, x_{f-1})$ est défini comme dans [5, §4] que l'on ne précise pas ici. On remarque que cela définit une bijection entre $\mathcal{D}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ et $\mathcal{D}(\overline{\rho})$, car si $\tau \neq \tau'$ sont tels que $\tau_i(r_i) = \tau'_i(r_i)$ pour tout i, on aura $e(\tau)(r_0, \cdots, r_{f-1}) \not\equiv e(\tau')(r_0, \cdots, r_{f-1}) \mod (q-1)$ (cf. la preuve de [8, Lem.12.8]). Dans la suite, on notera encore τ le poids associé au f-uplet $\tau = (\tau_i(x_i))_i$ défini dans (3).

Notons $\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}$ la semi-simplification de $\overline{\rho}$, alors $J_{\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}} = \mathcal{S}$ et la construction ci-dessus montre que $\mathcal{D}(\overline{\rho}^{\mathrm{ss}})$ consiste en les poids τ vérifiant les conditions (i)-(iii), la (iv) étant automatique. En particulier, on a $\mathcal{D}(\overline{\rho}) \subset \mathcal{D}(\overline{\rho}^{\mathrm{ss}})$. On pose pour tout $\tau \in \mathcal{D}(\overline{\rho}^{\mathrm{ss}})$:

$$J_\tau := \big\{i \in \{0, \cdots, f-1\}, \tau_i(x_i) \in \{x_i+1, p-3-x_i\}\big\} \subseteq J_{\overline{\rho}}. \tag{4}$$

Cela permet d'identifier $\mathcal{D}(\overline{\rho}^{\mathrm{ss}})$ (resp. $\mathcal{D}(\overline{\rho})$) avec l'ensemble des sous-ensembles de $\mathcal{S}$ (resp. $J_{\overline{\rho}}$) via $\tau \mapsto J_\tau$.

Soit $D(\overline{\rho})$ la représentation maximale (pour l'inclusion) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur k_E vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$-socle (i.e. la sous-représentation semi-simple maximale) de $D(\overline{\rho})$ est $\oplus_{\tau \in \mathcal{D}(\overline{\rho})} \tau$

(ii) chaque poids $\tau \in \mathcal{D}(\overline{\rho})$ n'apparaît qu'une seule fois dans $D(\overline{\rho})$.

L'existence et l'unicité d'une telle représentation sont montrées dans [8, §13] (elle est notée $D_0(\overline{\rho})$ dans *loc. cit.*) et on la voit naturellement comme une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)L^\times$ en faisant agir p trivialement. De plus on sait que $D(\overline{\rho})$ se décompose sous la forme $\oplus_{\tau \in \mathcal{D}(\overline{\rho})} D_\tau(\overline{\rho})$ où $D_\tau(\overline{\rho})$ est l'unique facteur direct de $D(\overline{\rho})$ de socle τ. Les caractères de $I(\mathcal{O}_L)$ qui apparaissent sur $D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ (ce dernier est stable par $I(\mathcal{O}_L)$) sont tous distincts ([8, Thm. 13.8]) et se sont caractérisés par un ensemble de f-uplets noté $\mathcal{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ comme suit. Par définition, $\mathcal{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ consiste en les f-uplets $\lambda = (\lambda_i(x_i))_i$ tels que :

(i) $\lambda_i(x_i) \in \{x_i, x_i+1, x_i+2, p-3-x_i, p-2-x_i, p-1-x_i\}$

(ii) si $\lambda_i(x_i) \in \{x_i, x_i+1, x_i+2\}$, alors $\lambda_{i+1}(x_{i+1}) \in \{x_{i+1}, x_{i+1}+2, p-2-x_{i+1}\}$

(iii) si $\lambda_i(x_i) \in \{p-1-x_i, p-2-x_i, p-3-x_i\}$, alors $\lambda_{i+1}(x_{i+1}) \in \{p-1-x_{i+1}, p-3-x_{i+1}, x_{i+1}+1\}$

(iv) $\lambda_i(x_i) \in \{p-3-x_i, x_i+2\}$ implique $i \in J_{\overline{\rho}}$

où l'on convient comme avant que $x_f = x_0$ et $\lambda_f(x_f) = \lambda_0(x_0)$. On pose

$$\tau(\lambda) := (\lambda_0(r_0), \cdots, \lambda_{f-1}(r_{f-1})) \otimes \det{}^{e(\lambda)(r_0,\cdots,r_{f-1})},\ \forall \lambda \in \mathcal{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1}) \tag{5}$$

où $e(\lambda)(x_0, \cdots, x_{f-1})$ est défini comme dans [5, §4]. On vérifie que $\tau(\lambda) \not\cong \tau(\lambda')$ si $\lambda \neq \lambda'$ sont deux f-uplets distincts de $\mathcal{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$. D'après [5, Prop. 4.2], les caractères de

$I(\mathcal{O}_L)$ qui apparaissent sur $D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ sont exactement les caractères $\tau(\lambda)^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ pour $\lambda \in \mathcal{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$. On remarque que si χ correspond à λ, alors son conjugué χ^s correspond à $\lambda^{[s]}$ où $\lambda^{[s]} \in \mathcal{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ est défini par $\lambda_i^{[s]}(x_i) = p - 1 - \lambda_i(x_i)$. En particulier $\chi \neq \chi^s$ et $D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ est stable par la transformation $\chi \mapsto \chi^s$.

Soit $\chi : I(\mathcal{O}_L) \to k_E^\times$ un caractère apparaissant sur $D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ correspondant à $\lambda \in \mathcal{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$. Comme χ^s y apparaît aussi par ce qui précède, il existe par réciprocité de Frobenius un morphisme non nul de $\overline{\sigma}(\chi^s) := \mathrm{Ind}_{I(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \chi^s$ vers $D(\overline{\rho})$, de sorte que $\overline{\sigma}(\chi^s)$ contient au moins un élément de $\mathcal{D}(\overline{\rho})$ comme sous-quotient. D'ailleurs, les constituants de $\overline{\sigma}(\chi^s)$ sont naturellement indexés par un certain sous-ensemble $\mathcal{P}_\chi$ de l'ensemble des parties de $\mathcal{S} = \{0, \cdots, f-1\}$. On renvoie le lecteur à [5, §2] pour la définition précise de $\mathcal{P}_\chi$, en rappelant seulement que $\mathcal{P}_\chi$ contient toujours $\{\emptyset, \mathcal{S}\}$ et que le socle de $\overline{\sigma}(\chi^s)$, soit $\tau(\lambda)$, est indexé par $\emptyset$ et le cosocle indexé par $\mathcal{S}$. D'après [5, Prop. 4.3], il existe un unique couple $(J^{\min}, J^{\max}) \in \mathcal{P}_\chi \times \mathcal{P}_\chi$ vérifiant $J^{\min} \subseteq J^{\max}$ et $J^{\max} \backslash J^{\min} \subseteq \delta(J_{\overline{\rho}})$ tel que les facteurs de Jordan-Hölder de $\overline{\sigma}(\chi^s)$ qui sont des poids de Serre pour $\overline{\rho}$ sont exactement les poids indexés par les parties de $\mathcal{S}$ contenant $J^{\min}$ et contenues dans $J^{\max}$. Explicitement, $J^{\min}$ et $J^{\max}$ sont définies comme suit (voir [5, (19)]) :

$$J^{\min} = \delta\big(\{j \mid \lambda_j(x_j) \in \{p-1-x_j, x_j+2\} \text{ ou } (\lambda_j(x_j) = x_j + 1 \text{ et } j \notin J_{\overline{\rho}})\}\big)$$

$$J^{\max} = \delta\big(\{j \mid \lambda_j(x_j) \notin \{p-3-x_j, x_j\} \text{ et } (j \in J_{\overline{\rho}} \text{ si } \lambda_j(x_j) = p-2-x_j)\}\big).$$

On en déduit que, si $\tau \in \mathcal{D}(\overline{\rho})$ est tel que χ^s apparaît sur $D_\tau(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ (un tel τ existe et est unique), alors τ apparaît dans $\overline{\sigma}(\chi^s)$ comme sous-quotient et est exactement celui indexé par $J^{\max}$ par construction de $D(\overline{\rho})$. Le résultat suivant détermine toutes les paires $\{\chi, \chi^s\}$ qui apparaissent sur $D_\tau(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ pour un même $\tau \in \mathcal{D}(\overline{\rho})$.

Proposition 2.1. *Conservons les notations précédentes. Pour que les caractères χ et χ^s apparaissent sur $D_\tau(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ pour un même $\tau \in \mathcal{D}(\overline{\rho})$, il faut et il suffit que*

$$J_{\overline{\rho}} \cap \{j \mid \lambda_j(x_j) \in \{x_j+1, p-2-x_j\}\} = \emptyset, \tag{6}$$

et dans ce cas $J_\tau = \{j \mid \lambda_j(x_j) \in \{p-3-x_j, x_j+2\}\}$ (voir (4) pour la définition de J_τ).

Démonstration. Soient respectivement τ et τ' le poids dans $\mathcal{D}(\overline{\rho})$ tels que χ^s apparaisse sur $D_\tau(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ et χ sur $D_{\tau'}(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$. Par ce qui précède, τ et τ' apparaissent tous les deux dans $\overline{\sigma}(\chi^s)$ en sous-quotient (car $\overline{\sigma}(\chi)$ et $\overline{\sigma}(\chi^s)$ ont les mêmes facteurs de Jordan-Hölder) et que τ y est indexé par $J^{\max}$ et τ' par $J^{\min}$. Par conséquent, pour que $\tau = \tau'$ il faut et il suffit que $J^{\min} = J^{\max}$, ce qui est équivalent à la condition (6) dans l'énoncé en examinant les définitions de $J^{\max}$ et de $J^{\min}$ ci-dessus.

Supposons maintenant que la condition (6) est satisfaite. On va déterminer J_τ où $\tau = \tau' \in \mathcal{D}(\overline{\rho})$ est comme ci-dessus. Par ce que nous avons montré, τ apparaît dans $\overline{\sigma}(\chi^s)$ comme sous-quotient et est indexé par :

$$J^{\min} = J^{\max} = \delta\big(\{j \mid \lambda_j(x_j) \in \{p-1-x_j, x_j+1, x_j+2\}\}\big).$$

Par la structure de $\overline{\sigma}(\chi^s)$ décrite dans [8, §2], on peut trouver un unique f-uplet $\mu = (\mu_0(y_0), \cdots, \mu_{f-1}(y_{f-1}))$ vérifiant :

(a) $\mu_i(y_i) \in \{y_i, y_i - 1, p-2-y_i, p-1-y_i\}$

(b) $\mu_i(y_i) \in \{y_i, y_i - 1\}$ implique $\mu_{i+1}(y_{i+1}) \in \{y_{i+1}, p-2-y_{i+1}\}$

(c) $\mu_i(y_i) \in \{p-2-y_i, p-1-y_i\}$ implique $\mu_{i+1}(y_{i+1}) \in \{p-1-y_{i+1}, y_{i+1}-1\}$
et tel que

$$\begin{aligned}(\mu_0(\lambda_0(r_0)), \cdots, \mu_{f-1}(\lambda_{f-1}(r_{f-1}))) \otimes \det{}^{e(\mu\circ\lambda)(r_0,\cdots,r_{f-1})} \\ = (\tau_0(r_0), \cdots, \tau_{f-1}(r_{f-1})) \otimes \det{}^{e(\tau)(r_0,\cdots,r_{f-1})}\end{aligned} \tag{7}$$

où $(\tau_i(x_i))_i \in \mathcal{D}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ est le f-uplet correspondant au poids τ et $\mu\circ\lambda := (\mu_i(\lambda_i(x_i)))_i$. On en déduit que :

$$\mu_i(\lambda_i(x_i)) = \tau_i(x_i), \quad \forall 0 \leq i \leq f-1.$$

D'ailleurs, le fait que τ est indexé par $J^{\min}(= J^{\max})$ implique que (voir [8, §2]) :

$$\delta\big(\{i \mid \lambda_i(x_i) \in \{p-1-x_i, x_i+1, x_i+2\}\}\big) = \{i \mid \mu_i(y_i) \in \{p-1-y_i, p-2-y_i\}\}$$

ou de manière équivalente (par la condition (c) ci-dessus et la définition de δ) :

$$\lambda_i(x_i) \in \{p-1-x_i, x_i+1, x_i+2\} \Longleftrightarrow \mu_i(y_i) \in \{p-1-y_i, y_i-1\}. \tag{8}$$

Rappelons que $J_\tau = \{i \mid \tau_i(x_i) \in \{x_i+1, p-3-x_i\}\}$ par définition. Vu l'égalité $\mu_i(\lambda_i(x_i)) = \tau_i(x_i)$, pour que $\tau_i(x_i) = x_i+1$, on a les quatre possibilités suivantes pour $\lambda_i(x_i)$ et $\mu_i(y_i)$:

$$\begin{array}{lll} \lambda_i(x_i) = x_i+1 & \text{et} & \mu_i(y_i) = y_i \\ \lambda_i(x_i) = p-2-x_i & \text{et} & \mu_i(y_i) = p-1-y_i \\ \lambda_i(x_i) = x_i+2 & \text{et} & \mu_i(y_i) = y_i-1 \\ \lambda_i(x_i) = p-3-x_i & \text{et} & \mu_i(y_i) = p-2-y_i. \end{array}$$

Or, seules les deux dernières cas sont compatibles avec la condition (8), d'où $\lambda_i(x_i) \in \{x_i+2, p-3-x_i\}$. De même on vérifie que la condition $\tau_i(x_i) = p-3-x_i$ force aussi que $\lambda_i(x_i) \in \{x_i+2, p-3-x_i\}$ par (8), donc

$$J_\tau \subseteq \{i \mid \lambda_i(x_i) \in \{p-3-x_i, x_i+2\}\}.$$

Réciproquement, si $\lambda_i(x_i) = x_i+2$, on vérifie que deux cas sont possibles pour $\tau_i(x_i)$:

$$\begin{array}{ll} \tau_i(x_i) = x_i+1 & (\text{avec } \mu_i(y_i) = y_i-1) \\ \tau_i(x_i) = p-3-x_i & (\text{avec } \mu_i(y_i) = p-1-y_i) \end{array}$$

et tous les deux cas sont compatibles avec (8). On en déduit que $i \in J_\tau$. On vérifie de la même façon que $\lambda_i(x_i) = p-3-x_i$ implique aussi $i \in J_\tau$, d'où le résultat. □

Corollaire 2.2. *Soit $\lambda \in \mathcal{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ satisfaisant la condition (6) de telle sorte que $J^{\min} = J^{\max} = \delta(\{j | \lambda_j(x_j) \in \{p-1-x_j, x_j+1, x_j+2\}\})$. Soit τ l'unique poids de $\mathcal{D}(\overline{\rho})$ tel que χ et χ^s apparaissent tous les deux sur $D_\tau(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$. Alors on a les équivalences suivantes :*

$$\begin{array}{lll} j \in \delta^{-1}(J^{\min}) \cap J_\tau & \Longleftrightarrow & \lambda_j(x_j) \in \{x_j+2\} \\ j \in \delta^{-1}(J^{\min}) \backslash J_\tau & \Longleftrightarrow & \lambda_j(x_j) \in \{p-1-x_j, x_j+1\} \\ j \in J_\tau \backslash \delta^{-1}(J^{\min}) & \Longleftrightarrow & \lambda_j(x_j) \in \{p-3-x_j\} \\ j \notin J_\tau \cup \delta^{-1}(J^{\min}) & \Longleftrightarrow & \lambda_j(x_j) \in \{p-2-x_j, x_j\}. \end{array}$$

Démonstration. Conséquence immédiate de la proposition 2.1. □

Pour $\lambda \in \mathcal{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ et τ comme dans le corollaire 2.2, on pose :

$$I(\lambda) := \delta^{-1}(J^{\min})\backslash J_\tau \coprod J_\tau \backslash \delta^{-1}(J^{\min}). \tag{9}$$

De manière explicite, on a $I(\lambda) = \{j \mid \lambda_j(x_j) \in \{x_j + 1, p - 1 - x_j, p - 3 - x_j\}\}$ d'après le corollaire 2.2.

Corollaire 2.3. *Soit $\lambda \in \mathcal{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ vérifiant la condition (6). On a les équivalences suivantes :*

$$\begin{aligned} \lambda_j(x_j) \in \{p-1-x_j, p-2-x_j, p-3-x_j\} \quad &\Longleftrightarrow \quad j+1 \in I(\lambda) \\ \lambda_j(x_j) \in \{x_j, x_j+1, x_j+2\} \quad &\Longleftrightarrow \quad j+1 \notin I(\lambda). \end{aligned}$$

Démonstration. Conséquence immédiate des définitions de $\mathcal{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ et de $I(\lambda)$. $\square$

Le corollaire suivant est un cas particulier de la proposition 2.1.

Corollaire 2.4. *Supposons que la représentation $\overline{\rho}$ est scindée. Soit $\lambda \in \mathcal{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ et soit $\chi := \tau(\lambda)^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ le caractère de $I(\mathcal{O}_L)$ correspondant à λ. Pour que χ et χ^s apparaissent sur $D_\tau(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ pour un même $\tau \in \mathcal{D}(\overline{\rho})$, il faut et il suffit que*

(i) ou bien $\lambda_j(x_j) \in \{x_j, x_j+2\}$ pour tout j, auquel cas $J_\tau = \{j \mid \lambda_j(x_j) = x_j + 2\}$

(ii) ou bien $\lambda_j(x_j) \in \{p-1-x_j, p-3-x_j\}$ pour tout j, auquel cas $J_\tau = \{j \mid \lambda_j(x_j) = p - 3 - x_j\}$.

Démonstration. Supposons que χ et χ^s apparaissent tous les deux sur $D_\tau(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$. Comme $\overline{\rho}$ est scindée, on a $J_{\overline{\rho}} = \mathcal{S}$ par définition (2) et la condition (6) se traduit à :

$$\lambda_j(x_j) \in \{x_j, x_j+2, p-1-x_j, p-3-x_j\}, \quad \forall\, 0 \leq j \leq f-1.$$

Le corollaire s'en déduit facilement de la définition de $\mathcal{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ et la proposition 2.1. $\square$

Corollaire 2.5. *Avec les notations précédentes, le nombre de paires (non ordonnées) $\{\chi, \chi^s\}$ telles que χ et χ^s apparaissent tous les deux sur $D_\tau(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ pour un même $\tau \in \mathcal{D}(\overline{\rho})$ est 2^{f-1} (resp. 2^f) si $\overline{\rho}$ est non scindée (resp. scindée).*

Démonstration. C'est une conséquence du corollaire 2.4 lorsque $\overline{\rho}$ est scindée et du corollaire 2.2 dans le cas non scindé (mais moins explicitement dans le dernier cas). On peut aussi déduire le résultat de [5, Prop. 4.4]. En effet, la proposition 4.4 *loc. cit.* entraîne que pour chaque sous-ensemble $J^{\min} \subseteq \mathcal{S}$ (i.e. on prend $J^{\min} = J^{\max}$), il existe un unique χ si $\overline{\rho}$ est non scindée, ou exactement deux χ si $\overline{\rho}$ est scindée, tel(s) que χ et χ^s apparaissent tous les deux sur $D_\tau(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$, où $\tau \in \mathcal{D}(\overline{\rho})$ est le poids sous-quotient de $\overline{\sigma}(\chi^s)$ indexé par $J^{\min}$. Le nombre de tels χ obtenus sont donc 2^f (resp. 2^{f+1}) dans le cas non scindé (resp. scindé) et le résultat s'en déduit en le divisant par 2. $\square$

La raison pour laquelle on ne considère que les $\lambda \in \mathcal{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ vérifiant (6) se trouve dans la proposition suivante.

Proposition 2.6. *Soit λ vérifiant (6) comme précédemment et χ le caractère correspondant à λ. Soit $\tau \in \mathcal{D}(\overline{\rho})$ comme dans le corollaire 2.2 et on écrit $s_i := \tau_i(r_i)$ pour tout $0 \leq i \leq f-1$ de sorte que $\tau = (s_0, \cdots, s_{f-1}) \otimes \det^{e(\tau)(r_0,\cdots,r_{f-1})}$. Soit π une représentation lisse de $\mathrm{GL}_2(L)$ sur k_E vérifiant les propriétés suivantes :*
(i) $p \in L^\times$ agit trivialement sur π
(ii) π contient $D(\overline{\rho})$
(iii) $D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ est stable par $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)$ dans π.
Alors il existe (à multiplication par un scalaire non nul près) un unique vecteur $v(\lambda) \in D_\tau(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)} \subset \pi^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ non nul sur lequel $I(\mathcal{O}_L)$ agit par χ^s et un unique élément $x(\lambda) \in k_E^\times$ tel que l'on ait l'égalité dans π :

$$\sum_{t \in \mathbb{F}_q} \Big(\prod_{j \notin J^{\min}} \sigma_0(t)^{p^j(p-1-s_j)} \Big) \begin{pmatrix} [t] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} v(\lambda)$$
$$= x(\lambda) \sum_{t \in \mathbb{F}_q} \Big(\prod_{j \in J^{\min}} \sigma_0(t)^{p^j(p-1-s_j)} \Big) \begin{pmatrix} [t] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v(\lambda). \quad (10)$$

Démonstration. C'est une conséquence de [8, Lem. 2.7] et de la réciprocité de Frobenius. D'abord, l'existence et l'unicité (à un scalaire près) de $v(\lambda)$ découlent du fait que le sous-espace propre de caractère χ^s de $D_\tau(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ est de dimension 1. Puis, comme le poids τ est indexé par $J^{\min}$ ($= J^{\max}$) dans $\overline{\sigma}(\chi^s)$, le vecteur :

$$\sum_{t \in \mathbb{F}_q} \Big(\prod_{j \in J^{\min}} \sigma_0(t)^{p^j(p-1-s_j)} \Big) \begin{pmatrix} [t] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v(\lambda)$$

est un générateur de $\tau^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ dans $D_\tau(\overline{\rho})$ par [8, Lem. 2.7]. D'autre part, l'hypothèse (iii) implique que le vecteur $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right) v(\lambda)$, sur lequel $I(\mathcal{O}_L)$ agit par χ, appartient à $D_\tau(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$. Le même argument appliqué à $\overline{\sigma}(\chi)$ et à $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right) v(\lambda)$ montre que le vecteur de gauche de (10) est aussi un générateur de $\tau^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ dans $D_\tau(\overline{\rho})$ (noter que τ est indexé par $\mathcal{S} \backslash J^{\min}$ dans $\overline{\sigma}(\chi)$). D'où le corollaire puisque $\dim_{k_E} \tau^{I_1(\mathcal{O}_L)} = 1$. $\square$

Remarque 2.7. *Reprenons les notations de la proposition 2.1 et supposons que χ est le caractère "$\eta(J) \otimes \eta'(J)$" où $\eta(J)$ et $\eta'(J)$ sont définis en [6, (3)] associés à une partie J de $\{0, \cdots, f-1\}$ (on identifie $\{0, \cdots, f-1\}$ avec $\{\sigma : \mathbb{F}_q \hookrightarrow k_E\}$ via $j \mapsto \sigma_0 \circ \varphi^{-j}$).*

(i) On retrouve [6, Lem.2.1.2] puisque $J_\tau = \emptyset$ d'après [6, Lem.2.1.1].

(ii) Notre $J^{\min}$ correspondant à χ est donc $\mathcal{S} \backslash J$, de sorte que la proposition 2.6 est compatible avec [6, Prop.2.6.1].

3 Modules fortement divisibles et leurs réductions

On calcule les modules de Fontaine-Laffaille de représentations réductibles de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$ sur k_E provenant de certains modules fortement divisibles avec donnée de descente modérément ramifiée.

On pose $e := p^f - 1$ et on définit S comme le complété p-adique de l'enveloppe aux puissances divisées de $\mathcal{O}_E[u]$ par rapport à l'idéal $(u^e + p)\mathcal{O}_E[u]$ compatibles avec les puissances divisées sur l'idéal $p\mathcal{O}_E[u]$. On note $\mathrm{Fil}^p S$ le complété p-adique de l'idéal engendré par $\frac{(u^e+p)^i}{i!}$ pour $i \geq p$. Soient $\eta, \eta' : \mathbb{F}_q^\times \to \mathcal{O}_E^\times$ deux caractères multiplicatifs distincts. On note $c=\sum_{i=0}^{f-1}p^ic_i\in\{1,\cdots,q-2\}$ l'unique entier tel que $\eta\eta'^{-1}=[\sigma_0]^c$ (où $[\cdot]:k_E^\times\to\mathcal{O}_E^\times$ désigne le représentant multiplicatif) et on note pour $j\in\mathcal{S}=\{0,\cdots,f-1\}$

$$c^{(j)}:=\sum_{i=0}^{j-1}c_{f-(j-i)}p^i+\sum_{i=j}^{f-1}c_{i-j}p^i\in\{1,\cdots,q-2\}.$$

On renvoie à [5, §5] pour la définition d'un $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible de type $\eta\otimes\eta'$ pour $\eta,\eta':\mathbb{F}_q^\times\to\mathcal{O}_E^\times$ deux caractères multiplicatifs distincts. Pour notre but, on ne considère que les modules qui ont la forme comme définie (sauf le (iv) ci-après) au début de [6, §2.2]. Concrètement, les $\mathcal{O}_E$-modules fortement divisibles qui nous intéressent dans cet article ont la forme générale suivante :

(i) $\mathcal{M}=\mathcal{M}^{\sigma_0}\times\cdots\times\mathcal{M}^{\sigma_0\circ\varphi^{-(f-1)}}$ avec $\mathcal{M}^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}=Se_\eta^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}\oplus Se_{\eta'}^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}$

(ii) pour tout $j\in\mathcal{S}$, $\mathrm{Gal}(L[\sqrt[e]{-p}]/L)$ agit sur $e_\eta^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}$ (resp. $e_{\eta'}^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}$) par η (resp. η')

(iii) pour tout $j\in\mathcal{S}$, on a l'une des deux possibilités ci-dessous pour l'application $\varphi_1:\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}\to\mathcal{M}^{\sigma_0\circ\varphi^{-(j+1)}}$ (où l'on remplace $\sigma_0\circ\varphi^{-j}$ par j pour alléger l'écriture) :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^j&=&\Big(S(e_\eta^j+a_ju^{c^{(j)}}e_{\eta'}^j)\oplus S(u^e+p)e_{\eta'}^j\Big)+\mathrm{Fil}^pS\cdot\mathcal{M}^j\\ \varphi_1(e_\eta^j+a_ju^{c^{(j)}}e_{\eta'}^j)&=&e_\eta^{j+1}\\ \varphi_1((u^e+p)e_{\eta'}^j)&=&e_{\eta'}^{j+1}\end{array}\right.\tag{11}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl}\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^j&=&\Big(S(u^e+p)e_\eta^j\oplus S(e_{\eta'}^j+a_ju^{e-c^{(j)}}e_\eta^j)\Big)+\mathrm{Fil}^pS\cdot\mathcal{M}^j\\ \varphi_1((u^e+p)e_\eta^j)&=&e_\eta^{j+1}\\ \varphi_1(e_{\eta'}^j+a_ju^{e-c^{(j)}}e_\eta^j)&=&e_{\eta'}^{j+1}\end{array}\right.\tag{12}$$

pour des $a_j=a_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}\in\mathcal{O}_E$ et avec αe_η^0 et $\alpha'e_{\eta'}^0$ au lieu de e_η^{j+1} et $e_{\eta'}^{j+1}$ dans l'image de φ_1 si $j=f-1$ où $\alpha,\alpha'\in\mathcal{O}_E^\times$. On note I_η (resp. $I_{\eta'}$) le sous-ensemble de $\mathcal{S}$ formé des j avec $\mathcal{M}^j$ comme en (11) (resp. comme en (12)) et $I_\eta^\times$ (resp. $I_{\eta'}^\times$) le sous-ensemble de I_η (resp. I'_η) formé des j tels que $a_j\in\mathcal{O}_E^\times$. Posons $I_\eta^0=I_\eta\backslash I_\eta^\times$ et $I_{\eta'}^0=I_{\eta'}\backslash I_{\eta'}^\times$.

(iv) On demande de plus que $\overline{\alpha\alpha}'=1$.

Remarque 3.1. *Dans [5], un autre type noté "*cas II*" est considéré, mais ce type n'interviendra pas dans notre cas parce que la condition (6) implique $J^{\min}=J^{\max}$ de sorte que* $\mathrm{II}=J^{\max}\backslash J^{\min}=\emptyset$ *(cf. [5, (26)]).*

On note $\overline{S}=S\otimes_{\mathcal{O}_E}k_E$ et $\overline{\mathcal{M}}=\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_E}k_E$ pour $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible de type $\eta\otimes\eta'$ comme ci-dessus. On pose

$$\overline{\rho}_{\mathcal{M}}=\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^1,\varphi_1}(\overline{\mathcal{M}},\widehat{A}_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p)^\vee(1)\tag{13}$$

où l'on renvoie à [14, §3] pour plus de détails sur le membre de droite. D'après [5, Thm.8.1] et en notant que $\mathrm{II}=\emptyset$ dans notre cas, $\overline{\rho}_{\mathcal{M}}$ est toujours réductible et est scindée si et seulement si $I_\eta^\times\coprod I_{\eta'}^\times=\emptyset$. De manière équivalente, $\overline{\mathcal{M}}$ contient toujours un sous-φ_1-module filtré (avec filtration induite) de rang 1 facteur direct comme $\overline{S}$-module et stable par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$, et un tel sous-module est unique si et seulement si $\overline{\rho}$ est non scindée. Par [5, Lem. 6.1], un tel sous-module est de la forme $\prod_{j=0}^{f-1} \overline{S}e^j$ avec deux possibilités pour chaque e^j : soit de la forme $\overline{e}_\eta^j + \beta_j u^{pc^{(j-1)}} \overline{e}_{\eta'}^j$ soit $\overline{e}_{\eta'}^j + \beta_j u^{p(e-c^{(j-1)})} \overline{e}_\eta^j$ où $\beta_j \in k_E$ et où $\overline{e}_\eta^j$ (resp. $\overline{e}_{\eta'}^j$) désigne l'image de e_η^j (resp. $e_{\eta'}^j$) dans $\overline{\mathcal{M}}$. On associe au module $\prod_{j=0}^{f-1} \overline{S}e^j$ une suite de caractères $\{\eta_j\}_{j\in\mathcal{S}}$ en posant $\eta_j = \eta$ si l'on est dans le premier cas pour e^j, et $\eta_j = \eta'$ dans le deuxième cas. D'après [5, Lem.6.3(iii)], on a la récurrence suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \eta_{j+1} & = & \eta_j & \text{si} \quad j \in I_\eta^0 \coprod I_{\eta'}^0 \\ \eta_{j+1} & = & \eta' & \text{si} \quad j \in I_\eta^\times \\ \eta_{j+1} & = & \eta & \text{si} \quad j \in I_{\eta'}^\times . \end{array}\right. \tag{14}$$

Si $\overline{\rho}_{\mathcal{M}}$ est non scindée, la suite $\{\eta_j\}_j$ est alors uniquement déterminée par $\mathcal{M}$ puisque $I_\eta^\times \coprod I_{\eta'}^\times \neq \emptyset$; si $\overline{\rho}_{\mathcal{M}}$ est scindée, alors $\overline{\mathcal{M}}$ est somme directe de deux sous-φ_1-modules filtrés de rang 1 dont la suite $\{\eta_j\}_j$ associée est respectivement la suite constante $\{\eta_j = \eta\}_j$ ou $\{\eta_j = \eta'\}_j$.

Proposition 3.2. *Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible de type $\eta \otimes \eta'$ et $\{\eta_j\}_j$ une suite vérifiant la récurrence (14) comme ci-dessus. Rappelons les entiers c_j qui sont définis par la relation $\eta\eta'^{-1} = [\sigma_0]^{\sum_{j=0}^{f-1} p^i c_j}$. Alors $\det \overline{\rho}_{\mathcal{M}} = \overline{\eta\eta'}\omega$ et*

$$\overline{\rho}_{\mathcal{M}} \cong \begin{pmatrix} \mathrm{nr}(A)\omega_{\sigma_0}^{\sum_{j=0}^{f-1} p^j (r'_j+1)} & * \\ 0 & \mathrm{nr}(A^{-1}) \end{pmatrix} \otimes \theta$$

où θ est un caractère convenable uniquement déterminé, $r'_j \in \{0, \cdots, p-3\}$ vérifiant

$$\left\{\begin{array}{lcllll} r'_{f-j} & = & c_{f-j} - 2 & \text{si} & j \in I_\eta^0 & \text{et} \quad \eta_j = \eta \\ r'_{f-j} & = & p-1-c_{f-j} & \text{si} & j \in I_\eta & \text{et} \quad \eta_j = \eta' \\ r'_{f-j} & = & c_{f-j} & \text{si} & j \in I_{\eta'} & \text{et} \quad \eta_j = \eta \\ r'_{f-j} & = & p-3-c_{f-j} & \text{si} & j \in I_{\eta'}^0 & \text{et} \quad \eta_j = \eta' \\ r'_{f-j} & = & c_{f-j} - 1 & \text{si} & j \in I_\eta^\times & \text{et} \quad \eta_j = \eta \\ r'_{f-j} & = & p-2-c_{f-j} & \text{si} & j \in I_{\eta'}^\times & \text{et} \quad \eta_j = \eta', \end{array}\right. \tag{15}$$

et où

$$\left\{\begin{array}{lcll} A & = & \overline{\alpha} \prod_{\{j|\eta_j\neq\eta_{j+1}\}} \overline{a}_i & \text{si} \quad \eta_0 = \eta \\ A & = & \overline{\alpha}^{-1} \prod_{\{j|\eta_j\neq\eta_{j+1}\}} \overline{a}_i & \text{si} \quad \eta_0 = \eta'. \end{array}\right. \tag{16}$$

Démonstration. L'assertion sur $\det \overline{\rho}_{\mathcal{M}}$ se montre par un calcul direct et le fait que $r'_j \in \{0, \cdots, p-3\}$ se déduit de [5, Lem.6.3] et de (17) ci-après.

Montrons maintenant (15) et (16). On explicite tout d'abord un sous-φ_1-module filtré de rang 1 facteur direct stable par toutes les opérations. On pose pour $j \in \{0, \cdots, f-1\}$:

$$\begin{array}{lcllll} e^{j+1} & = & \overline{e}_\eta^{j+1} & \text{si} & j \in I_\eta^0 & \text{et} \quad \eta_j = \eta \\ e^{j+1} & = & \overline{e}_{\eta'}^{j+1} & \text{si} & j \in I_\eta^0 & \text{et} \quad \eta_j = \eta' \\ e^{j+1} & = & \overline{e}_\eta^{j+1} & \text{si} & j \in I_{\eta'}^0 & \text{et} \quad \eta_j = \eta \\ e^{j+1} & = & \overline{e}_{\eta'}^{j+1} & \text{si} & j \in I_{\eta'}^0 & \text{et} \quad \eta_j = \eta' \\ e^{j+1} & = & \overline{e}_{\eta'}^{j+1} - \overline{a}_j^{-1} u^{p(e-c^{(j)})} \overline{e}_\eta^{j+1} & \text{si} & j \in I_\eta^\times & \text{et} \quad \eta_j = \eta \\ e^{j+1} & = & \overline{e}_{\eta'}^{j+1} & \text{si} & j \in I_\eta^\times & \text{et} \quad \eta_j = \eta' \\ e^{j+1} & = & \overline{e}_\eta^{j+1} & \text{si} & j \in I_{\eta'}^\times & \text{et} \quad \eta_j = \eta \\ e^{j+1} & = & \overline{e}_\eta^{j+1} - \overline{a}_j^{-1} u^{pc^{(j)}} \overline{e}_{\eta'}^{j+1} & \text{si} & j \in I_{\eta'}^\times & \text{et} \quad \eta_j = \eta' \end{array}$$

en remplaçant $\overline{a}_j^{-1}$ par $\overline{a}_{f-1}^{-1}\overline{\alpha}^{-2}$ (resp. $\overline{a}_{f-1}^{-1}\overline{\alpha}^{2}$) si $j = f-1$ et $\eta_0 = \eta$ (resp. $\eta_0 = \eta'$). Nous allons vérifier que le sous-module $\overline{\mathcal{N}} := \overline{S}e^0 \times \cdots \times \overline{S}e^{f-1}$ de $\overline{\mathcal{M}}$ est stable par toutes les opérations et que si $h_j \in \{0, \cdots, e\}$ est le plus petit entier tel que $u^{h_j}e^j \in \mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}}$, alors :

$$\begin{array}{lclclcl} h_j = 0 & \text{et} & \varphi_1(e^j) = e^{j+1} & \text{si} & j \in I_\eta^0 & \text{et} & \eta_j = \eta \\ h_j = e & \text{et} & \varphi_1(e^j) = e^{j+1} & \text{si} & j \in I_\eta^0 & \text{et} & \eta_j = \eta' \\ h_j = e & \text{et} & \varphi_1(e^j) = e^{j+1} & \text{si} & j \in I_{\eta'}^0 & \text{et} & \eta_j = \eta \\ h_j = 0 & \text{et} & \varphi_1(e^j) = e^{j+1} & \text{si} & j \in I_{\eta'}^0 & \text{et} & \eta_j = \eta' \\ h_j = e - c^{(j)} & \text{et} & \varphi_1(e^j) = -\overline{a}_j e^{j+1} & \text{si} & j \in I_\eta^\times & \text{et} & \eta_j = \eta \\ h_j = e & \text{et} & \varphi_1(e^j) = e^{j+1} & \text{si} & j \in I_\eta^\times & \text{et} & \eta_j = \eta' \\ h_j = e & \text{et} & \varphi_1(e^j) = e^{j+1} & \text{si} & j \in I_{\eta'}^\times & \text{et} & \eta_j = \eta \\ h_j = c^{(j)} & \text{et} & \varphi_1(e^j) = -\overline{a}_j e^{j+1} & \text{si} & j \in I_{\eta'}^\times & \text{et} & \eta_j = \eta' \end{array} \tag{17}$$

en multipliant le terme e^{j+1} ou $-\overline{a}_j e^{j+1}$ par $\overline{\alpha}$ si $j = f-1$ et $\eta_0 = \eta$, par $\overline{\alpha}^{-1}$ si $j = f-1$ et $\eta_0 = \eta'$.

C'est clair que $\overline{\mathcal{N}}$ est stable par l'action de $\mathrm{Gal}(L[\sqrt[e]{-p}]/L)$. Nous allons vérifier que l'image de $\mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{N}}$ (la filtration induite) par φ_1 est contenue dans $\overline{\mathcal{N}}$ et engendre $\overline{\mathcal{N}}$ sur $\overline{S}$, i.e. $\varphi_1(u^{h_j}e^j) \in \overline{S}^\times e^{j+1}$ pour tout j. On le fera lorsque $\eta_j = \eta$ et $j \neq f-1$ en laissant le cas $\eta_j = \eta'$ ou $j = f-1$ au lecteur. Supposons donc $\eta_j = \eta$ et $j \neq f-1$. Par définition et la récurrence (14), cela donne les possibilités suivantes pour η_{j-1} et e^j :

$$\begin{array}{lclcll} e^j & = & \overline{e}_\eta^j & \text{si} & j-1 \in I_\eta^0 \coprod I_{\eta'} & \text{et} \quad \eta_{j-1} = \eta \\ e^j & = & \overline{e}_\eta^j - \overline{a}_{j-1}^{-1}u^{pc^{(j-1)}}\overline{e}_{\eta'}^j & \text{si} & j-1 \in I_{\eta'}^\times & \text{et} \quad \eta_{j-1} = \eta'. \end{array} \tag{18}$$

La vérification se fait au cas par cas comme suit. Rappelons que l'on a toujours

$$\varphi_1(u^{h_j}e^j) = \varphi_1(u^{h_j}\overline{e}_\eta^j) \tag{19}$$

d'après [5, Lem. 6.3(ii)].

(a) Supposons que $j \in I_\eta^0$ (et $\eta_j = \eta$). Alors on a par (11) (car $\mathrm{val}(a_j) > 0$)

$$\mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}}^j = \overline{S}\overline{e}_\eta^j \oplus \overline{S}u^e\overline{e}_{\eta'}^j, \quad \varphi_1(\overline{e}_\eta^j) = \overline{e}_\eta^{j+1}, \quad \varphi_1(u^e\overline{e}_{\eta'}^j) = \overline{e}_{\eta'}^{j+1}.$$

Dans le premier cas de (18), on a clairement $h_j = 0$ et par (19) $\varphi_1(e^j) = \varphi_1(\overline{e}_\eta^j) = \overline{e}_\eta^{j+1} = e^{j+1}$ comme énoncé. Dans le deuxième cas de (18), en notant que $pc^{(j-1)} > e$ car $c_{f-j} > 1$ grâce à (15), on a $e^j \in \mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}}^j$ d'où aussi $h_j = 0$ puis $\varphi_1(e^j) = \varphi_1(\overline{e}_\eta^j) = e^{j+1}$ par (19).

(b) Supposons que $j \in I_{\eta'}^0$ (et $\eta_j = \eta$). Alors on a par (12) (car $\mathrm{val}(a_j) > 0$)

$$\mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}}^j = \overline{S}u^e\overline{e}_\eta^j \oplus \overline{S}\overline{e}_{\eta'}^j, \quad \varphi_1(u^e\overline{e}_\eta^j) = \overline{e}_\eta^{j+1}, \quad \varphi_1(\overline{e}_{\eta'}^j) = \overline{e}_{\eta'}^{j+1}.$$

Dans le premier cas de (18), on a $h_j = e$ et $\varphi_1(u^e e^j) = \varphi_1(u^e\overline{e}_\eta^j) = \overline{e}_\eta^{j+1} = e^{j+1}$. Dans le deuxième cas de (18), on a encore $h_j = e$ et $\varphi_1(u^e e^j) = \varphi_1(u^e\overline{e}_\eta^j) = e^{j+1}$ par (19).

(c) Supposons que $j \in I_\eta^\times$ (et $\eta_j = \eta$). Alors on a par (11)

$$\mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}}^j = \overline{S}(\overline{e}_\eta^j + \overline{a}_j u^{c^{(j)}}\overline{e}_{\eta'}^j) \oplus \overline{S}u^e\overline{e}_{\eta'}^j, \quad \varphi_1(\overline{e}_\eta^j + \overline{a}_j u^{c^{(j)}}\overline{e}_{\eta'}^j) = \overline{e}_\eta^{j+1}, \quad \varphi_1(u^e\overline{e}_{\eta'}^j) = \overline{e}_{\eta'}^{j+1}.$$

Dans le premier cas de (18), on a

$$u^{e-c^{(j)}}e^j = u^{e-c^{(j)}}\overline{e}^j_\eta = u^{e-c^{(j)}}(\overline{e}^j_\eta + \overline{a}_j u^{c^{(j)}}\overline{e}^j_{\eta'}) - \overline{a}_j u^e \overline{e}^j_{\eta'} \in \mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}}^j$$

et on voit facilement que $e - c^{(j)}$ est le plus petit entier vérifiant cette condition, i.e. $h_j = e - c^{(j)}$. On en déduit l'énoncé dans ce cas :

$$\varphi_1(u^{e-c^{(j)}}e^j) = u^{p(e-c^{(j)})}\overline{e}^{j+1}_\eta - \overline{a}_j\overline{e}^{j+1}_{\eta'} = -\overline{a}_j(\overline{e}^{j+1}_{\eta'} - \overline{a}_j^{-1}u^{p(e-c^{(j)})}\overline{e}^{j+1}_\eta)$$

qui nous donne exactement $-\overline{a}_j e^{j+1}$ par définition de e^{j+1}. Dans le deuxième cas de (18), on a

$$u^{e-c^{(j)}}e^j = u^{e-c^{(j)}}(\overline{e}^j_\eta - \overline{a}_{j-1}^{-1}u^{pc^{(j-1)}}\overline{e}^j_{\eta'}) = u^{e-c^{(j)}}\overline{e}^j_\eta - \overline{a}_{j-1}^{-1}u^{e-c^{(j)}+pc^{(j-1)}}\overline{e}^j_{\eta'},$$

qui appartient à $\mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}}^j$ puisque $u^{e-c^{(j)}}\overline{e}^j_\eta$ l'est et $(e-c^{(j)})+pc^{(j-1)} = e(c_{f-j}+1) > e$, d'où $h_j = e-c^{(j)}$. Par (19) et le calcul du premier cas, on obtient aussi comme énoncé :

$$\varphi_1(u^{e-c^{(j)}}e^j) = \varphi_1(u^{e-c^{(j)}}e^j_\eta) = -\overline{a}_j e^{j+1}.$$

(d) Supposons que $j \in I^\times_{\eta'}$ (et $\eta_j = \eta$). Alors on a par (12)

$$\mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}}^j = \overline{S}u^e\overline{e}^j_\eta \oplus \overline{S}(\overline{e}^j_{\eta'} + \overline{a}_j u^{e-c^{(j)}}\overline{e}^j_\eta),\ \ \varphi_1(u^e\overline{e}^j_\eta) = \overline{e}^{j+1}_\eta,\ \ \varphi_1(\overline{e}^j_{\eta'} + \overline{a}_j u^{e-c^{(j)}}\overline{e}^j_\eta) = \overline{e}^{j+1}_{\eta'}.$$

Dans le premier cas de (18), on vérifie que $h_j = e$ et $\varphi_1(u^e e^j) = \varphi_1(u^e\overline{e}^j_\eta) = \overline{e}^{j+1}_\eta = e^{j+1}$. Dans le deuxième cas de (18), on a de même $h_j = e$ et $\varphi_1(u^e e^j) = \varphi_1(u^e\overline{e}^j_\eta) = e^{j+1}$ par (19).

Les énoncés de (17) sont donc vérifiés.

En résumé, on obtient par [15, Ex. 3.7] :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^1,\varphi_1}(\overline{\mathcal{N}}, \widehat{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p)^\vee(1) \cong \mathrm{nr}(A)\overline{\eta_0}\omega^h_{\sigma_0}$$

avec $h := \frac{1}{e}\sum_{j=0}^{f-1} p^{f-j}h_j$ et

$$\begin{cases} A = \overline{\alpha} \displaystyle\prod_{\{j|j\in I^\times_\eta, \eta_j=\eta\}} (-\overline{a}_j) \prod_{\{j|j\in I^\times_{\eta'}, \eta_j=\eta'\}} (-\overline{a}_j) & \text{si } \eta_0 = \eta \\ A = \overline{\alpha}^{-1} \displaystyle\prod_{\{j|j\in I^\times_\eta, \eta_j=\eta\}} (-\overline{a}_j) \prod_{\{j|j\in I^\times_{\eta'}, \eta_j=\eta'\}} (-\overline{a}_j) & \text{si } \eta_0 = \eta'. \end{cases}$$

L'énoncé concernant A s'en déduit en notant que (par la récurrence (14))

$$\{j|j \in I^\times_\eta, \eta_j = \eta\} \coprod \{j|j \in I^\times_{\eta'}, \eta_j = \eta'\} = \{j|\eta_j \neq \eta_{j+1}\}$$

et que $|\{j|\eta_j \neq \eta_{j+1}\}|$ est toujours pair. Enfin en regardant le déterminant de $\overline{\rho}_{\mathcal{M}}$, on trouve

$$\begin{aligned} \overline{\rho}_{\mathcal{M}} &\cong \begin{pmatrix} \mathrm{nr}(A)\overline{\eta_0}\omega^h_{\sigma_0} & * \\ 0 & \mathrm{nr}(A^{-1})\overline{\eta^{\mathrm{c}}_0}\omega^{-h}_{\sigma_0}\omega \end{pmatrix} \\ &\cong \begin{pmatrix} \mathrm{nr}(A)\overline{\eta_0}(\overline{\eta^{\mathrm{c}}_0})^{-1}\omega^{2h}_{\sigma_0}\omega^{-1} & * \\ 0 & \mathrm{nr}(A^{-1}) \end{pmatrix} \otimes (\overline{\eta^{\mathrm{c}}_0}\omega^{-h}_{\sigma_0}\omega) \end{aligned}$$

où $\eta^{\mathrm{c}}_0 := \eta'$ (resp. $\eta^{\mathrm{c}}_0 := \eta$) si $\eta_0 = \eta$ (resp. $\eta_0 = \eta'$). Le même calcul comme dans la preuve de [5, Lem.6.3] donne les égalités de (15) et donc achève la preuve (notons que seul le cas $\eta_0 = \eta$ est traité dans [5, Lem.6.3], mais on trouve le même résultat lorsque $\eta_0 = \eta'$). □

Remarque 3.3. *Lorsque $\overline{\rho}_{\mathcal{M}}$ est réductible scindée, on a deux choix pour la suite $\{\eta_j\}_j$ et chacun donnera une façon d'exprimer $\overline{\rho}_{\mathcal{M}}$ comme dans la proposition 3.2. À cause de cela, on a souvent besoin de traiter séparément le cas scindé (voir le corollaire 4.2 plus loin).*

La preuve de la proposition suivante est essentiellement contenue dans celle de [7, Prop. 5.1.2].

Proposition 3.4. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible de type $\eta\otimes\eta'$ et soit $\{\eta_j\}_j$ une suite vérifiant la récurrence (14). Soient $\{r'_j\}_{0\leq j\leq f-1}$, θ et A comme dans l'énoncé de la proposition 3.2. Le module de Fontaine-Laffaille de $\overline{\rho}_{\mathcal{M}}\otimes\theta^{-1}$ est le suivant :*

$$M = M^{\sigma_0}\times M^{\sigma_0\circ\varphi^{-1}}\times\cdots\times M^{\sigma_0\circ\varphi^{-(f-1)}}$$

avec (en écrivant $M^j = M^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}$ et $a_j = a_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}$) :

$$\begin{cases} M^j &= k_E v^j \oplus k_E w^j & \\ \mathrm{Fil}^i M^j &= M^j & \text{si } i\leq 0 \\ \mathrm{Fil}^i M^j &= k_E w^j & \text{si } 1\leq i\leq r'_{f-j}+1 \\ \mathrm{Fil}^i M^j &= 0 & \text{si } i\geq r'_{f-j}+2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \varphi(v^j) &= v^j \\ \varphi_{r'_{f-j}+1}(w^j) &= w^{j+1}-A_j v^{j+1} \end{cases} \text{si } 0\leq j\leq f-2$$
$$\begin{cases} \varphi(v^{f-1}) &= Av^0 \\ \varphi_{r'_1+1}(w^{f-1}) &= A^{-1}w^0 - A_{f-1}v^0 \end{cases}$$

où :

$$\begin{cases} A_j = \overline{a}_j \prod\limits_{\substack{0\leq i\leq j-1\\ \{i|\eta_i\neq\eta_{i+1}\}}} (-\overline{a}_j^{-2}) & \text{si } \eta_j = \eta_{j+1} \\ A_j = \overline{a}_j^{-1} \prod\limits_{\substack{0\leq i\leq j-1\\ \{i|\eta_i\neq\eta_{i+1}\}}} (-\overline{a}_j^{-2}) & \text{si } \eta_j \neq \eta_{j+1} \end{cases}$$

en multipliant le membre de droite par A si $j = f-1$.

Démonstration. C'est la même preuve que celle de [7, Porp. 5.1.2], en notant que l'ensemble $I^{\times}$ défini dans la preuve n'est autre que $\{j|\eta_j\neq\eta_{j+1}\}$. $\square$

4 Valeurs spéciales de paramères

On montre le résultat principal de l'article, le théorème 4.7, qui donne une valeur spéciale du paramètre $x(\lambda)$ (défini dans la proposition 2.6) reliée à la représentation $\overline{\rho}$ de départ.

On fixe $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ une représentation comme au §2 (i.e. définie en (1)) et $\lambda\in\mathcal{PD}(x_0,\cdots,x_{f-1})$ un f-uplet vérifiant la condition (6). Soit $\chi : I(\mathcal{O}_L)\to k_E^{\times}$ le caractère correspondant, i.e. $\chi\cong\tau(\lambda)^{I_1(\mathcal{O}_L)}$, et on écrit (de manière unique) $\chi = \overline{\eta}(\lambda)\otimes\overline{\eta}'(\lambda)$ avec $\overline{\eta}(\lambda),\overline{\eta}'(\lambda) : \mathcal{O}_L^{\times}\to k_E^{\times}$ des caractères lisses. On pose

$$\eta(\lambda) := [\overline{\eta}(\lambda)] \ \ (\text{resp. } \eta'(\lambda) := [\overline{\eta}'(\lambda)])$$

la composée de $\eta(\lambda)$ (resp. $\eta'(\lambda)$) par le représentant multiplicatif $[\cdot] : k_E^{\times}\to\mathcal{O}_E^{\times}$. On vérifie que $\eta(\lambda) = \eta'(\lambda)\prod_{j=0}^{f-1}[\sigma_0]^{p^j c_j}$ avec $c_j := \lambda_j(r_j)$.

Si J est un sous-ensemble de $\mathcal{S}$, on pose la "frontière de J" comme en [6, (5)] :

$$F(J) := \{j\in\mathcal{S}|j\in J, j+1\notin J\}\coprod\{j\in\mathcal{S}|j\notin J, j+1\in J\}.$$

Corollaire 4.1. *Conservons les notations précédentes et supposons que $\overline{\rho}$ est non scindée. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible de type $\eta(\lambda)\otimes\eta'(\lambda)$ tel que $\overline{\rho}\cong\overline{\rho}_{\mathcal{M}}$. On définit $\{\eta_j\}_j$, avec $\eta_j\in\{\eta(\lambda),\eta'(\lambda)\}$, comme l'unique suite vérifiant la récurrence (14) (cf. §3). Alors*

(i) $\eta_j=\eta(\lambda)$ (resp. $\eta_j=\eta'(\lambda)$) si et seulement si $f+1-j\notin I(\lambda)$ (resp. $f+1-j\in I(\lambda)$), où $I(\lambda)$ est défini en (9) ;

(ii) $\eta_j\neq\eta_{j+1}$ si et seulement si $f-j\in F(I(\lambda))$;

(iii) $j\in I_{\eta(\lambda)}$ si et seulement si $f-j\in\delta^{-1}(J^{\min}(\lambda))$, en particulier $|I_{\eta(\lambda)}|=|J^{\min}|$ et $I_{\eta'(\lambda)}=|\mathcal{S}\backslash J^{\min}|$.

Démonstration. Puisque $\overline{\rho}$ est non scindée par hypothèse, le fait que $\overline{\rho}\cong\overline{\rho}_{\mathcal{M}}$ implique $r_{f-j}=r'_{f-j}$ pour tout j où r'_j est défini en (15).

(i) Par le corollaire 2.3 et la proposition 3.2 et en rappelant que $c_j=\lambda_j(r_j)$, on trouve :

$$\begin{aligned}\eta_j=\eta(\lambda) &\iff \lambda_{f-j}(x_{f-j})\in\{x_{f-j},x_{f-j}+1,x_{f-j}+2\}\\ &\iff f-j+1\notin I(\lambda).\end{aligned}$$

(ii) Il se déduit du (i).

(iii) Par (15), $j\in I_{\eta(\lambda)}$ si et seulement si $c_{f-j}\in\{r_{f-j}+1,r_{f-j}+2,p-1-r_{f-j}\}$, si et seulement si $f-j\in\delta^{-1}(J^{\min})$ d'après le corollaire 2.2. □

Corollaire 4.2. *Conservons les notations précédentes et supposons que $\overline{\rho}$ est scindée. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible de type $\eta(\lambda)\otimes\eta'(\lambda)$ tel que $\overline{\rho}\cong\overline{\rho}_{\mathcal{M}}$. Alors $|I_{\eta(\lambda)}|=|J^{\min}|$, $|I_{\eta'(\lambda)}|=|\mathcal{S}\backslash J^{\min}|$ et*

(i) $\overline{\alpha}=\xi$ si $\lambda_j(x_j)\in\{x_j,x_j+2\}$ pour tout j ;

(ii) $\overline{\alpha}=\xi^{-1}$ si $\lambda_j(x_j)\in\{p-1-x_j,p-3-x_j\}$ pour tout j.

Démonstration. Reprenons les notations de la proposition 3.2. Puisque $\overline{\rho}_{\mathcal{M}}$ est réductible scindée, il y a deux possibilités pour $\{\eta_j\}_j$: soit la suite constante $\{\eta(\lambda)\}_j$, soit la suite constante $\{\eta'(\lambda)\}_j$. Par la proposition 3.2, on obtient deux façons d'écrire $\overline{\rho}_{\mathcal{M}}$:

(a) si $\eta_j=\eta(\lambda)$ pour tout j dans la proposition 3.2, alors $\overline{\rho}_{\mathcal{M}}$ s'écrit sous la forme

$$\overline{\rho}_{\mathcal{M}}\cong\left(\mathrm{nr}(\overline{\alpha})\omega_{\sigma_0}^{\sum_{j=0}^{f-1}p^j(r'_j+1)}\oplus\mathrm{nr}(\overline{\alpha}^{-1})\right)\otimes\theta'$$

avec θ' un caractère convenable uniquement déterminé et (notons que $I^{\times}_{\eta(\lambda)}\coprod I^{\times}_{\eta'(\lambda)}=\emptyset$)

$$\begin{cases} r'_{f-j}=c_{f-j}-2 & \text{si}\quad j\in I^0_{\eta(\lambda)}\\ r'_{f-j}=c_{f-j} & \text{si}\quad j\in I^0_{\eta'(\lambda)}.\end{cases}$$

(b) si $\eta_j=\eta'(\lambda)$ pour tout j dans la proposition 3.2, alors $\overline{\rho}_{\mathcal{M}}$ s'écrit sous la forme

$$\overline{\rho}_{\mathcal{M}}\cong\left(\mathrm{nr}(\overline{\alpha}^{-1})\omega_{\sigma_0}^{\sum_{j=0}^{f-1}p^j(r''_j+1)}\oplus\mathrm{nr}(\overline{\alpha})\right)\otimes\theta''$$

avec θ'' convenable uniquement déterminé et

$$\begin{cases} r''_{f-j}=p-1-c_{f-j} & \text{si}\quad j\in I^0_{\eta(\lambda)}\\ r''_{f-j}=p-3-c_{f-j} & \text{si}\quad j\in I^0_{\eta'(\lambda)}.\end{cases}$$

Montrons maintenant le corollaire. (i) Supposons que $\lambda_j(x_j) \in \{x_j, x_j+2\}$, d'où $c_j = \lambda_j(r_j) \in \{r_j, r_j+2\}$. Dans ce cas la condition $\overline{\rho} \cong \overline{\rho}_{\mathcal{M}}$ force que l'on est dans le cas (a) ci-dessus, c'est-à-dire :

$$\theta' = 1, \quad \overline{\alpha} = \xi, \quad r'_j = r_j.$$

(ii) Supposons que $\lambda_j(x_j) \in \{p-1-x_i, p-3-x_i\}$, d'où $c_j = \lambda_j(r_j) \in \{p-1-r_j, p-3-r_j\}$. Dans ce cas la condition $\overline{\rho} \cong \overline{\rho}_{\mathcal{M}}$ force que l'on est dans le cas (b) ci-dessus, donc

$$\theta'' = 1, \quad \overline{\alpha} = \xi^{-1}, \quad r''_j = r_j.$$

Enfin, dans tous les deux cas, on a $j \in I_{\eta(\lambda)}$ si et seulement si $r_{f-j} \in \{c_{f-j}-2, p-1-c_{f-j}\}$, si et seulement si $f-j \in \delta^{-1}(J^{\min})$ vu la définition de $J^{\min}$, d'où $|I_{\eta(\lambda)}| = |J^{\min}|$ et par conséquent $|I_{\eta'(J)}| = |\mathcal{S} \backslash J^{\min}|$. $\square$

Théorème 4.3. *Conservons les notations au début du paragraphe et soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible de type $\eta(\lambda) \otimes \eta'(\lambda)$ tel que $\overline{\rho} \cong \overline{\rho}_{\mathcal{M}}$. Soit G le groupe p-divisible avec donnée de descente correspondant à $\mathcal{M}$ et D le module de Dieudonné contravariant associé à G. Alors la valeur propre de φ^f sur la partie isotypique de D pour le caractère $\eta'(\lambda)$ de $\mathrm{Gal}(L[\sqrt[e]{-p}]/L)$ est égale à $p^{|\mathcal{S}\backslash J^{\min}|}\alpha'$ où $\alpha' \in \mathcal{O}_E^{\times}$ a pour réduction dans $k_E^{\times}$:*

$$\overline{\alpha}' = (-1)^{\frac{1}{2}|F(I(\lambda))|} \frac{\sqrt[f]{\xi}^{|I(\lambda)|}}{\sqrt[f]{\xi}^{|\mathcal{S}\backslash I(\lambda)|}} \frac{\prod_{\{j|j\in I(\lambda), j+1\notin I(\lambda)\}} \mu_{f-j}}{\prod_{\{j|j\notin I(\lambda), j+1\in I(\lambda)\}} \mu_{f-j}}. \tag{20}$$

Démonstration. Remarquons que l'élément de $k_E^{\times}$ défini en (20) ne dépend pas du choix de $\sqrt[f]{\xi}$. En effet, le changement de $\sqrt[f]{\xi}$ par $\mu\sqrt[f]{\xi}$ avec $\mu \in k_E^{\times}$ et $\mu^f = 1$ induit le changement de $\{\mu_i\}_{0\leq i\leq f-1}$ de la forme :

$$\mu_i \mapsto \mu^{2(i+1)}\mu_i,$$

puis le changement de la formule (20) par un multiple d'elle-même par :

$$\frac{\mu^{|I(\lambda)|}}{\mu^{|\mathcal{S}\backslash I(\lambda)|}} \frac{\prod_{\{j|j\in I(\lambda), j+1\notin I(\lambda)\}} \mu^{2(f-j+1)}}{\prod_{\{j|j\notin I(\lambda), j+1\in I(\lambda)\}} \mu^{2(f-j+1)}} = \mu^{2|I(\lambda)|} \cdot \frac{\prod_{\{j|j\notin I(\lambda), j+1\in I(\lambda)\}} \mu^{2j}}{\prod_{\{j|j\in I(\lambda), j+1\notin I(\lambda)\}} \mu^{2j}} = 1$$

puisque $|\{j|j \in I(\lambda), j+1 \notin I(\lambda)\}| = |\{j|j \notin I(\lambda), j+1 \in I(\lambda)\}|$ et $\sum_{\{j|j\notin I(\lambda), j+1\in I(\lambda)\}} j - \sum_{\{j|j\in I(\lambda), j+1\notin I(\lambda)\}} j = |\mathcal{S}\backslash I(\lambda)|$.

Ensuite c'est clair de la définition de $\mathcal{M}$ que la valeur propre de φ^f sur la partie isotypique de D pour le caractère $\eta'(\lambda)$ est $p^{|I_{\eta'(\lambda)}|}\alpha'$ où α' est comme dans l'expression de $\mathcal{M}$ au début du §3. Puisque $|I_{\eta'(\lambda)}| = |\mathcal{S}\backslash J^{\min}|$ par les corollaires 4.1 et 4.2, il reste à calculer la réduction dans $k_E^{\times}$ de α'.

Supposons d'abord que $\overline{\rho} \cong \overline{\rho}_{\mathcal{M}}$ est scindée. Il y a donc deux possibilités pour λ :

(i) si $\lambda_j \in \{x_j, x_j+2\}$ pour tout j, on a $\overline{\alpha}' = \xi^{-1}$ par le corollaire 4.2, et $I(\lambda) = \emptyset$ et $F(I(\lambda)) = \emptyset$ par (9), d'où la formule énoncée ;

(ii) si $\lambda_i(x_j) \in \{p-1-x_j, p-3-x_j\}$ pour tout j, on a $\overline{\alpha}' = \xi$ par le corollaire 4.2, et $I(\lambda) = \mathcal{S}$ et $F(I(\lambda)) = \emptyset$ par (9), d'où la formule énoncée.

Supposons dans la suite que $\overline{\rho}$ est non scindée et soit $\{\eta_j\}_j$ l'unique suite (avec $\eta_j \in \{\eta(\lambda), \eta'(\lambda)\}$) associée à $\mathcal{M}$ comme dans §3. Comme $\overline{\rho}$ est non scindée, la condition $\overline{\rho} \cong \overline{\rho}_{\mathcal{M}}$ force que (avec les notations de la proposition 3.2) :

$$\theta = 1, \quad A = \xi, \quad r'_j = r_j, \ \forall\ 0 \leq j \leq f-1.$$

On obtient en particulier

$$\overline{\alpha}' = \overline{\alpha}^{-1} = \begin{cases} \xi^{-1}\prod_{\{j|\eta_j\neq\eta_{j+1}\}}\overline{a}_j & \text{si} \quad \eta_0 = \eta(\lambda) \\ \xi\big(\prod_{\{j|\eta_j\neq\eta_{j+1}\}}\overline{a}_j\big)^{-1} & \text{si} \quad \eta_0 = \eta'(\lambda) \end{cases}$$

ce qui ramène à calculer $\prod_{\{j|\eta_j\neq\eta_{j+1}\}}\overline{a}_j$ pour terminer la preuve.

En comparant le module de Fontaine-Laffaille de $\overline{\rho}_{\mathcal{M}}$ dans la proposition 3.4 et celui de $\overline{\rho}$ normalisé au §2, on obtient comme dans la preuve de [6, Thm.2.4.1]

$$\begin{cases} \overline{a}_j = -\sqrt[f]{\xi}^{-2(j+1)}x_j\prod_{\substack{0\leq i\leq j-1\\ \eta_i\neq\eta_{i+1}}}(-\overline{a}_i^2) & \text{si} \quad \eta_j = \eta_{j+1} \\ \overline{a}_j = -\sqrt[f]{\xi}^{2(j+1)}x_j^{-1}\prod_{\substack{0\leq i\leq j-1\\ \eta_i\neq\eta_{i+1}}}(-\overline{a}_i^{-2}) & \text{si} \quad \eta_j \neq \eta_{j+1}. \end{cases} \tag{21}$$

Puis, en utilisant (21) et en notant $0\leq j_1<j_2<\cdots<j_{2t-1}<j_{2t}\leq f-1$ les éléments de $\{0,\cdots,f-1\}$ tels que $\eta_j\neq\eta_{j+1}$ (remarquons que $|\{j|\eta_j\neq\eta_{j+1}\}|$ est toujours pair), on montre comme dans la preuve de [6, Thm.2.4.1] que :

$$\overline{a}_{j_1}\overline{a}_{j_2}\cdots\overline{a}_{j_{2t}} = \prod_{\{j|\eta_j\neq\eta_{j+1}\}}\overline{a}_j = (-1)^t\frac{\prod_{i=1}^{t}x_{j_{2i-1}}\sqrt[f]{\xi}^{2j_{2i}}}{\prod_{i=1}^{t}x_{j_{2i}}\sqrt[f]{\xi}^{2j_{2i-1}}}.$$

Supposons d'abord que $\eta_0=\eta(\lambda)$. On a alors les faits suivants :

$$\{j_{2i-1}, 1\leq i\leq t\} = \{j|\eta_j=\eta(\lambda), \eta_{j+1}=\eta'(\lambda)\}$$
$$\{j_{2i}, 1\leq i\leq t\} = \{j|\eta_j=\eta'(\lambda), \eta_{j+1}=\eta(\lambda)\}$$

et

$$\sum_{i=1}^{t}(j_{2i}-j_{2i-1}) = |\{j|\eta_j=\eta'(\lambda)\}|.$$

On déduit donc de tout ce qui précède que (si $\eta_0=\eta(\lambda)$) :

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}' &= \lambda^{-1}\big(\prod_{\{j|\eta_j\neq\eta_{j+1}\}}\overline{a}_j\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt[f]{\xi}^f}\cdot(-1)^{\frac{1}{2}|\{j|\eta_j\neq\eta_{j+1}\}|}\sqrt[f]{\xi}^{2|\{j|\eta_j=\eta'(\lambda)\}|}\frac{\prod_{\{j|\eta_j=\eta(\lambda),\eta_{j+1}=\eta'(\lambda)\}}\mu_j}{\prod_{\{j|\eta_j=\eta'(\lambda),\eta_{j+1}=\eta(\lambda)\}}\mu_j} \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}|\{j|\eta_j\neq\eta_{j+1}\}|}\frac{\sqrt[f]{\xi}^{|\{j|\eta_j=\eta'(\lambda)\}|}}{\sqrt[f]{\xi}^{|\{j|\eta_j=\eta(\lambda)\}|}}\frac{\prod_{\{j|\eta_j=\eta(\lambda),\eta_{j+1}=\eta'(\lambda)\}}\mu_j}{\prod_{\{j|\eta_j=\eta'(\lambda),\eta_{j+1}=\eta(\lambda)\}}\mu_j}. \end{aligned}$$

La formule voulue s'en déduit en utilisant le corollaire 4.1 qui nous dit que

$$|\{j|\eta_j\neq\eta_{j+1}\}| = |F(I(\lambda))|, \quad |\{j|\eta_j=\eta(\lambda)\}| = |\mathcal{S}\backslash I(\lambda)|, \quad |\{j|\eta_j=\eta'(\lambda)\}| = |I(\lambda)|$$

et que $\{j|\eta_j=\eta(\lambda),\eta_{j+1}=\eta'(\lambda)\} = \{f-j|j\in I(\lambda), j+1\notin I(\lambda)\}$ et $\{j|\eta_j=\eta'(\lambda),\eta_{j+1}=\eta(\lambda)\} = \{f-j|j\notin I(\lambda), j+1\in I(\lambda)\}$. On laisse au lecteur à traiter le cas $\eta_0=\eta'(\lambda)$ où l'on trouve la même formule. $\square$

Soit $\tau\in\mathcal{D}(\overline{\rho})$ le poids de Serre tel que χ et χ^s apparaissent tous les deux sur $D_\tau(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ où l'on rappelle que $\chi=\tau(\lambda)^{I_1(\mathcal{O}_L)}$. En notant $s_j=\tau_j(r_j)$, on a

$$\tau = (s_0,\cdots,s_{f-1})\otimes\det{}^{e(\tau)(r_0,\cdots,r_{f-1})}.$$

Rappelons que $c_j := \lambda_j(r_j)$ pour tout $j\in\mathcal{S}$. Le lemme ci-dessous permet d'écrire c_j en fonction de s_j.

Lemme 4.4. *(i) On a les relations suivantes :*

$$\begin{array}{rclcccc} c_j & = & p-2-s_j & si & j\in J^{\min} & et & j-1\notin J^{\min}\\ c_j & = & p-1-s_j & si & j\in J^{\min} & et & j-1\in J^{\min}\\ c_j & = & s_j+1 & si & j\notin J^{\min} & et & j-1\in J^{\min}\\ c_j & = & s_j & si & j\notin J^{\min} & et & j-1\notin J^{\min}.\end{array}$$

(ii) On a

$$\prod_{j\notin J^{\min}}[\sigma_0]^{p^j(p-1-s_j)}\prod_{j\in\mathcal{S}}[\sigma_0]^{p^jc_j}=\prod_{j\in J^{\min}}[\sigma_0]^{p^j(p-1-s_j)}.$$

Démonstration. Le (i) se déduit du fait que τ apparaît dans $\overline{\sigma}(\chi^s)=\mathrm{Ind}_{I(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)}\chi^s$ en position "$J^{\min}$" (voir [8, Lem.2.7]). Le (ii) se déduit du (i). □

Théorème 4.5. *Soient $\overline{\rho}$, λ, $\mathcal{M}$, G et D comme dans le théorème 4.3. Soient V (resp. V') la valeur propre de φ^f sur la partie η-isotypique (resp. η'-isotypique) de D. Considérons la série principale modérément ramifiée :*

$$\Pi(\lambda):=\mathrm{Ind}_{B(L)}^{\mathrm{GL}_2(L)}\eta'(\lambda)\mathrm{nr}(V')|\cdot|\otimes\eta(\lambda)\mathrm{nr}(V)$$

où $\eta(\lambda)$ et $\eta'(\lambda)$ sont vus comme des caractères de $L^\times$ en envoyant p et $1+p\mathcal{O}_L$ vers 1. Soit $\hat{v}(\lambda)\in\Pi(\lambda)^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ un vecteur non nul sur lequel $I(\mathcal{O}_L)$ agit par $\eta'(\lambda)\otimes\eta(\lambda)$ (un tel vecteur existe et est unique à mutliplication par un scalaire non nul près). Si $J^{\min}\notin\{\emptyset,\mathcal{S}\}$, il existe un unique élément $\hat{x}(\lambda)\in\mathcal{O}_E^\times$ tel que dans $\Pi(\lambda)$:

$$\sum_{t\in\mathbb{F}_q}\Big(\prod_{j\notin J^{\min}}[\sigma_0(t)]^{p^j(p-1-s_j)}\Big)\begin{pmatrix}[t]&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\p&0\end{pmatrix}\hat{v}(\lambda)$$
$$=\hat{x}(\lambda)\sum_{t\in\mathbb{F}_q}\Big(\prod_{j\in J^{\min}}[\sigma_0(t)]^{p^j(p-1-s_j)}\Big)\begin{pmatrix}[t]&1\\1&0\end{pmatrix}\hat{v}(\lambda).$$

De plus, la réduction de $\hat{x}(\lambda)$ dans $k_E^\times$ est :

$$(-1)^{1+\frac{|F(J^{\min})|}{2}+\frac{|F(I(\lambda))|}{2}}\frac{\sqrt[f]{\xi}^{|I(\lambda)|}}{\sqrt[f]{\xi}^{|\mathcal{S}\setminus I(\lambda)|}}\frac{\prod_{\{j|j\notin J^{\min},j-1\in J^{\min}\}}(s_j+1)}{\prod_{\{j|j\in J^{\min},j-1\notin J^{\min}\}}(s_j+1)}\frac{\prod_{\{j|j\in I(\lambda),j+1\notin I(\lambda)\}}\mu_{f-j}}{\prod_{\{j|j\notin I(\lambda),j+1\in I(\lambda)\}}\mu_{f-j}}.$$

Démonstration. La même preuve que celle de [6, Thm. 2.5.2] en utilisant le lemme 4.4 ci-dessus nous donne (l'hypothèse que $J^{\min}\notin\{\emptyset,\mathcal{S}\}$ est utilisée à cette étape)

$$\hat{x}(\lambda)=(-1)^{\sum_{j\notin J^{\min}}s_j}\frac{1}{p^f}V'X'$$

avec $X'=Up^{|J^{\min}|}+C\in\mathcal{O}_E^\times$ où $\mathrm{val}(C)>|J^{\min}|$ et où

$$U\equiv(-1)^{1+\frac{|F(J^{\min})|}{2}+\sum_{j\notin J^{\min}}s_j}\frac{\prod_{\{j\notin J^{\min},j-1\in J^{\min}\}}(s_j+1)}{\prod_{\{j\in J^{\min},j-1\notin J^{\min}\}}(s_j+1)}\ \text{ modulo } p.$$

Compte tenu du fait que $V'=p^{|\mathcal{S}\setminus J^{\min}|}\alpha'$ (d'après le théorème 4.3), on en déduit que

$$\begin{array}{rcl}\hat{x}(\lambda)&=&(-1)^{\sum\limits_{j\notin J^{\min}}s_j}\frac{1}{p^f}p^{|\mathcal{S}\setminus J^{\min}|}\alpha'(Up^{|J^{\min}|}+C)\\ &\equiv&(-1)^{\sum\limits_{j\notin J^{\min}}s_j}\alpha'U\pmod p\\ &\equiv&\overline{\alpha}'(-1)^{1+\frac{|F(J^{\min})|}{2}}\frac{\prod_{\{j|j\notin J^{\min},j-1\in J^{\min}\}}(s_j+1)}{\prod_{\{j|j\in J^{\min},j-1\notin J^{\min}\}}(s_j+1)}\pmod p.\end{array}$$

Le résultat s'en déduit en utilisant le théorème 4.3. □

Remarque 4.6. *Regardons le cas où $J^{\min} = \emptyset$ ou $J^{\min} = \mathcal{S}$. Cette hypothèse force que $J_\tau \in \{\emptyset, \mathcal{S}\}$ par la proposition 2.1. Le cas où $J_\tau = \emptyset$ est couvert par [6, Rem.2.5.3]. Lorsque $J_\tau = \mathcal{S}$, $\overline{\rho}$ est forcément scidée, on a un résultat analogue comme suit : si $J^{\min} = \emptyset$, alors*

$$\sum_{t\in\mathbb{F}_q}\Big(\prod_{j\in\mathcal{S}}[\sigma_0(t)]^{p^j(p-1-s_j)}\Big)\begin{pmatrix}[t] & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ p & 0\end{pmatrix}\hat{v}(\lambda) = -\alpha'\sum_{t\in\mathbb{F}_q}\begin{pmatrix}[t] & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\hat{v}(\lambda)+q\alpha'\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\hat{v}(\lambda).$$

si $J^{\min} = \mathcal{S}$, on a

$$\sum_{t\in\mathbb{F}_q}\begin{pmatrix}[t] & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ p & 0\end{pmatrix}\hat{v}(\lambda) = -\alpha\sum_{t\in\mathbb{F}_q}\Big(\prod_{j\in\mathcal{S}}[\sigma_0(t)]^{p^j(p-1-s_j)}\Big)\begin{pmatrix}[t] & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\hat{v}(\lambda)+q\begin{pmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\hat{v}(\lambda).$$

En résumé, on déduit de tout ce qui précède notre résultat principal.

Théorème 4.7. *Soient $\overline{\rho}$ et $\lambda \in \mathcal{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ vérifiant la condition (6) comme au §2 avec $\tau \in \mathcal{D}(\overline{\rho})$ le poids de Serre associé. Ecrivons $s_j = \tau_j(r_j)$ pour tout j. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible vérifiant les hypothèses du théorème 4.3 et on définit $\Pi(\lambda)$ comme dans le théorème 4.5. Soit π une représentation lisse de $\mathrm{GL}_2(L)$ sur k_E vérifiant les propriétés suivantes :*
(i) $p \in L^\times$ agit trivialement sur π
(ii) π contient $D(\overline{\rho})$
(iii) $D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ est stable par $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ p & 0\end{smallmatrix}\right)$ dans π.
On définit $x(\lambda) \in k_E^\times$ comme dans la proposition 2.6. Supposons de plus qu'il existe un $\mathcal{O}_E$-réseau stable $\Pi^0(\lambda)$ dans $\Pi(\lambda)$ contenant $\hat{v}(\lambda)$ ainsi qu'un morphisme $\mathcal{O}_E$-linéaire $\mathrm{GL}_2(L)$-équivariant $\Pi^0(\lambda) \to \pi$ tel que l'image de $\hat{v}(\lambda)$ est non nulle et se trouve dans $D(\overline{\rho})$. Alors on a :

$$x(\lambda) = (-1)^{1+\frac{|F(J^{\min})|}{2}+\frac{|F(I(\lambda))|}{2}}\,\frac{\sqrt[f]{\xi}^{|I(\lambda)|}}{\sqrt[f]{\xi}^{|\mathcal{S}\setminus I(\lambda)|}}\,\frac{\prod\limits_{\{j|j\notin J^{\min},j-1\in J^{\min}\}}(s_j+1)}{\prod\limits_{\{j|j\in J^{\min},j-1\notin J^{\min}\}}(s_j+1)}\,\frac{\prod\limits_{\{j|j\in I(\lambda),j+1\notin I(\lambda)\}}\mu_{f-j}}{\prod\limits_{\{j|j\notin I(\lambda),j+1\in I(\lambda)\}}\mu_{f-j}}. \tag{22}$$

Démonstration. Cela découle de la proposition 2.6 et du théorème 4.5, car les hypothèses entraînent que la réduction de $\hat{v}(\lambda)$ est forcément un mutliple de $v(\lambda)$. □

Remarque 4.8. *(i) L'hypothèse (iii) sur π est particulièrement satisfaite si l'on a l'égalité $D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)} = \pi^{I_1(\mathcal{O}_L)}$; de plus, si tel est le cas, l'image de $\hat{v}(\lambda)$, si non nulle, se trouve automatiquement dans $D(\overline{\rho})$.*

(ii) Lorsque $J_\tau = \emptyset$, on a $J^{\min} = \mathcal{S}\setminus J$ et $I(\lambda) = \delta^{-1}(\mathcal{S}\setminus J)$, ce qui implique $|F(J^{\min})| = |F(I(\lambda))|$ et que $\frac{|F(J^{\min})|+|F(I(\lambda))|}{2}$ est pair. On retrouve donc [6, Thm.2.5.2] du théorème 4.7.

On donnera au §6 des exemples lorsque $f = 3$ pour illustrer les paramètres que nous avons calculé.

5 Paramètres cycliques (cf. [4])

On définit et calcule des paramètres cycliques de diagrammes de Diamond, toujours pour $\overline{\rho}$ réductible non scindée, qui sont analogues à ceux étudiés par Breuil dans [4].

Fixons $\overline{\rho}$ réductible comme en (1). On définit $\mathcal{PD}^{\text{ss}}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ comme le sous-ensemble de $\mathcal{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ formé par les f-uplets $\lambda = (\lambda_i(x_i))_i$ tels que $\lambda_i(x_i) \in \{x_i, x_i+1, p-2-x_i, p-3-x_i\}$ pour tout $i \in \mathcal{S}$. Remarquons que c'est aussi l'ensemble des f-uplets λ vérifiant les conditions (i)-(iii) dans la définition de $\mathcal{D}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ (cf. §2) mais avec (iv) remplacé par : $\lambda_i(x_i) \in \{p-3-x_i\}$ implique $i \in J_{\overline{\rho}}$. On en déduit que

$$\mathcal{D}(x_0, \cdots, x_{f-1}) \subseteq \mathcal{PD}^{\text{ss}}(x_0, \cdots, x_{f-1}) \subseteq \mathcal{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1}).$$

Notons $\overline{\rho}^{\text{ss}}$ la semi-simplification de $\overline{\rho}$ et $\mathcal{D}(\overline{\rho}^{\text{ss}})$ l'ensemble des poids de Serre associés (§2). Par des rappels au début du §2, les poids $\tau(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathcal{PD}^{\text{ss}}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ sont exactement les poids de $\mathcal{D}(\overline{\rho}^{\text{ss}})$ tels que les caractères correspondant de $I(\mathcal{O}_L)$, i.e. $\tau(\lambda)^{I_1(\mathcal{O}_L)}$, apparaissent sur $D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$.

Soit $D(\overline{\rho}^{\text{ss}})$ la représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ (cf. §2) associée à $\overline{\rho}^{\text{ss}}$. Alors $D(\overline{\rho}^{\text{ss}})$ se décompose en somme directe $\oplus_{\ell=0}^{f} D_\ell(\overline{\rho}^{\text{ss}})$ vérifiant

$$\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)} D_\ell(\overline{\rho}^{\text{ss}}) = \bigoplus_{J \subseteq \mathcal{S}, |J| = \ell} \tau(J)$$

où $\tau(J)$ désigne l'unique poids de $\mathcal{D}(\overline{\rho}^{\text{ss}})$ tel que $J_{\tau(J)} = J$ (cf. (4)). La proposition suivante est une conséquence de la construction de [8] (mais pas énoncée explicitement).

Proposition 5.1. *Il existe des sous-représentations uniques $D_\ell(\overline{\rho})$ de $D_\ell(\overline{\rho}^{\text{ss}})$ pour $0 \leq \ell \leq f$, telles que $D(\overline{\rho}^{\text{ss}})$ soit extension successive de la forme*

$$D_0(\overline{\rho}) \;\text{—}\; D_1(\overline{\rho}) \;\text{—}\; \cdots \;\text{—}\; D_f(\overline{\rho}).$$

avec

$$\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)} D_\ell(\overline{\rho}) = \bigoplus \tau(J) \tag{23}$$

où la somme est prise pour les $\lambda \in \mathcal{PD}^{\text{ss}}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ tels que $|J_\lambda| = \ell$.

Démonstration. On donne le détail de la preuve. Prouvons d'abord un résultat préliminaire. Soit $\lambda \in \mathcal{PD}^{\text{ss}}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ avec $|J_\lambda| = \ell$. Supposons que $J_\lambda \nsubseteq J_{\overline{\rho}}$, ce qui assure que $\tau(J)$ n'est pas un poids dans $\mathcal{D}(\overline{\rho})$. Par [8, Lem. 15.3], le poids $\tau(\lambda)$ apparaît sur la composante $D_{\tau(J_\lambda \cap J_{\overline{\rho}})}(\overline{\rho})$. Soit W_λ l'unique sous-représentation de $D_{\tau(J_\lambda \cap J_{\overline{\rho}})}(\overline{\rho})$ de co-socle $\tau(\lambda)$. On sait décrire la structure de W_λ grâce à [8, Cor. 4.11]. Précisément, si on définit $\mathcal{S}(\lambda)$ comme dans [8, Cor. 4.11] (mais on a besoin de faire un changement de variable), alors les sous-quotients irréductibles de W_λ correspondent à des sous-ensembles de $\mathcal{S}(\lambda)$ (car une condition de compatibilité doit être imposée). Or, si $i \in J_\lambda \backslash J_{\overline{\rho}}$, on a par définition $\lambda_i(x_i) = x_i + 1$ et $\tau(J_\lambda \cap J_{\overline{\rho}})_i(x_i) \in \{x_i, p-2-x_i\}$, d'où l'inclusion $J_\lambda \backslash J_{\overline{\rho}} \subseteq \mathcal{S}(\lambda)$ par la définition de $\mathcal{S}(\lambda)$. D'autre part, si $i \notin J_\lambda \cup J_{\overline{\rho}}$, on a $\lambda_i(x_i), \tau(J_\lambda \cap J_{\overline{\rho}})_i(x_i) \in \{x_i, p-2-x_i\}$, d'où $i \notin \mathcal{S}(\lambda)$. On en conclut donc

$$J_\lambda \backslash J_{\overline{\rho}} \subseteq \mathcal{S}(\lambda) \subseteq J_\lambda \cup J_{\overline{\rho}}.$$

Maintenant si $\lambda' \neq \lambda$ est un autre élément de $\mathcal{PD}^{\text{ss}}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ avec $|J_{\lambda'}| = \ell$ et tel que $J_\lambda \cap J_{\overline{\rho}} = J_{\lambda'} \cap J_{\overline{\rho}}$, alors $\tau(\lambda')$ n'est pas un sous-quotient de W_λ : en effet, on a $J_{\lambda'} \backslash J_{\overline{\rho}} \nsubseteq J_\lambda \cup J_{\overline{\rho}}$ car $J_\lambda \cup J_{\overline{\rho}}$ et $J_{\lambda'} \cup J_{\overline{\rho}}$ sont deux ensembles *distincts* de même cardinal.

Montrons la proposition. On définit $D_0(\overline{\rho})$ comme la plus grande sous-représentation de $D(\overline{\rho})$ qui vérifie la condition (23) sur socle et qui ne contient pas les poids $\tau(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathcal{PD}^{\text{ss}}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ et $|J_\lambda| \geq 1$. Par ce qui précède, le quotient $D(\overline{\rho})/D_0(\overline{\rho})$ contient dans son *socle* tous les poids $\tau(\lambda)$ avec $|J_\lambda| = 1$ (et $\lambda \in \mathcal{PD}^{\text{ss}}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ bien sûr), on peut donc continuer la construction pour définir $D_1(\overline{\rho})$ et on conclut par récurrence. Enfin, le fait que $D_\ell(\overline{\rho})$ est contenue dans $D_\ell(\overline{\rho}^{\text{ss}})$ se déduit facilement de [8, Prop. 13.1]. $\square$

Remarque 5.2. *(i) La représentation $D_\ell(\overline{\rho})$ peut être bien strictement plus petite que $D_\ell(\overline{\rho}^{\rm ss})$. Par exemple, lorsque $J_{\overline{\rho}} = \emptyset$, on a $D_\ell(\overline{\rho}) = 0$ pour $\ell \geq \lfloor f/2 \rfloor + 1$, car dans ce cas $i \in J_\lambda$ entraîne $i+1, i-1 \notin J_\lambda$.*

(ii) En général, $D_\ell(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ contient plus de caractères que ceux provenant de $D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$, et n'est pas forcément stable par $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Ce phénomène se présente déjà dans le cas $f = 2$ et $|\mathcal{D}(\overline{\rho})| = 1$.

Dans la suite, on *fixe* un diagramme de Diamond $D(\overline{\rho}, r)$ associé à $\overline{\rho}$ (cf. [8]), ce qui revient à se donner une action de $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sur $D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ et prendre $r : D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)} \hookrightarrow D(\overline{\rho})$ l'inclusion naturelle. Rappelons que p agit trivialement sur $D(\overline{\rho})$.

Notons encore δ l'application bijective de $\mathcal{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ sur lui-même en posant $\delta(\lambda)_i(x_i) = \lambda_{i+1}(x_i)$. Pour $\lambda \in \mathcal{PD}^{\rm ss}(x_0, \cdots, x_{f-1})$, on a (par définition (9))

$$I_\lambda = \{i \in \mathcal{S} | \lambda_i(x_i) \in \{x_i + 1, p - 3 - x_i\}\}.$$

Il est évident que $\mathcal{PD}^{\rm ss}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ est stable par δ et que $I(\delta(\lambda)) = \delta(I(\lambda))$.

Lemme 5.3. *Soit $\lambda \in \mathcal{PD}^{\rm ss}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ et $w(\lambda) \in D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ (resp. $w(\delta(\lambda)) \in D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$) un vecteur de base de $\tau(\lambda)^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ (resp. à $\tau(\delta(\lambda))^{I_1(\mathcal{O}_L)}$).*

(i) Il existe un unique entier $s(\lambda)$ dans $\{0, \cdots, q-1\}$ tel que

$$\sum_{t \in \mathbb{F}_q} \sigma_0(t)^{s(\lambda)} \begin{pmatrix} [t] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} w(\lambda) \in k_E^\times w(\delta(\lambda)).$$

(ii) On a explicitement

$$s(\lambda) = \sum_{\{j | j \in \delta(I(\lambda)), j+1 \notin \delta(I(\lambda))\}} p^j(p - 2 - r_j) + \sum_{\{j | j \notin \delta(I(\lambda)), j+1 \in \delta(I(\lambda))\}} p^j(r_j + 1).$$

(ii) Si $J_{\overline{\rho}} = \emptyset$, on a

$$s(\lambda) = \sum_{j \in \delta(I(\lambda))} p^j(p - 2 - r_j) + \sum_{j \in \delta^2(I(\lambda))} p^j(r_j + 1).$$

Démonstration. (i) Rappelons (§2) que $\lambda^{[s]}$ désigne $(p - 1 - \lambda_i(x_i))_i$ le f-uplet correspondant à $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right) w(\lambda)$. Par la preuve de [4, Prop. 5.1], il suffit de montrer que la représentation $\langle \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q). \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right) w(\lambda) \rangle$ contient $\tau(\delta(\lambda))$ comme sous-quotient. Dans le cas où $\overline{\rho}$ est scindée, $\tau(\lambda)$ et $\tau(\lambda^{[s]})$ sont des vrais poids de Serre de $\overline{\rho}$, et l'énoncé se déduit de [8, Lem. 15.2], qui nous dit que le poids $\tau(\lambda^{[s]})$ apparaît sur la composante $D_{\tau(\delta(\lambda))}(\overline{\rho})$. Le cas général se déduit de la proposition 5.1.

(ii) Déterminons l'entier $s(\lambda)$. On a les relations suivantes :

- si $\delta(\lambda)_i(x_i) \in \{x_i, p - 2 - x_i\}$, alors $\lambda_i(x_i) \in \{x_i, x_i + 1\}$ et $\lambda_i^{[s]}(x_i) \in \{p - 1 - x_i, p - 2 - x_i\}$;
- si $\delta(\lambda)_i(x_i) \in \{x_i + 1, p - 3 - x_i\}$, alors $\lambda_i(x_i) \in \{p - 2 - x_i, p - 3 - x_i\}$ et $\lambda_i^{[s]}(x_i) \in \{x_i + 1, x_i + 2\}$.

Combiné avec [8, Lem. 2.7], on en déduit que

$$\begin{aligned} s(\lambda) &= \sum_{\{j | \delta(\lambda)_j(x_j) \in \{x_j + 1, p - 2 - x_j\}\}} p^j \big(p - 1 - \delta(\lambda)_j(r_j)\big) \\ &= \sum_{\{j | j \in \delta(I(\lambda)), j+1 \notin \delta(I(\lambda))\}} p^j(p - 2 - r_j) + \sum_{\{j | j \notin \delta(I(\lambda)), j+1 \in \delta(I(\lambda))\}} p^j(r_j + 1). \end{aligned}$$

(iii) Il suffit de noter que lorsque $J_{\overline{\rho}} = \emptyset$, $I(\lambda)$ n'est autre que $\{i \in \mathcal{S} | \lambda_i(x_i) = x_i + 1\}$ et que $i \in I(\lambda)$ implique automatiquement $i-1, i+1 \notin I(\lambda)$. $\square$

Soit $\lambda \in \mathcal{PD}^{\mathrm{ss}}(x_0, \cdots, x_{f-1})$. On note d_λ la longueur de l'orbite de δ contenant λ, i.e. le plus petit entier positif d tel que $\delta^d(\lambda) = \lambda$ et $\delta^{d-1}(\lambda) \neq \lambda$. Le lemme 5.3 permet de définir un morphisme pour tout $0 \leq i \leq d_\lambda - 1$:

$$\begin{array}{rlcl} S: & \tau(\delta^i(\lambda))^{I_1(\mathcal{O}_L)} & \to & \tau(\delta^{i+1}(\lambda))^{I_1(\mathcal{O}_L)} \\ & w(\delta^i(\lambda)) & \mapsto & \displaystyle\sum_{t \in \mathbb{F}_q} t^{s(\delta^i(\lambda))} \left(\begin{smallmatrix} p & [t] \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w(\delta^i(\lambda)) \end{array}$$

ainsi qu'un isomorphisme

$$S^{d_\lambda} : \tau(\lambda)^{I_1(\mathcal{O}_L)} \to \tau(\lambda)^{I_1(\mathcal{O}_L)}.$$

L'espace $\tau(\lambda)^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ étant de dimension 1 sur k_E, S^{d_λ} est donné par la multiplication par un scalaire $\nu(\lambda) \in k_E^\times$. Clairement $\nu(\lambda)$ ne dépend pas de $w(\lambda)$ et on a $\nu(\lambda) = \nu(\delta^i(\lambda))$ pour tout $1 \leq i \leq d_\lambda - 1$.

Remarque 5.4. *Le paramètre $\nu(\lambda)$ est un avatar de celui pour $\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}$ défini dans [4, §6] (voir aussi [5, Question 9.5(i)]). Notre résultat principal ci-après dit que l'on trouve exactement la valeur privilégiée y prédite dans le cas particulier $J_{\overline{\rho}} = \emptyset$.*

Le résultat principal de ce § est le suivant dont la démonstration occupe le reste du §.

Théorème 5.5. *Supposons que $J_{\overline{\rho}} = \emptyset$. Soient $\lambda \in \mathcal{PD}^{\mathrm{ss}}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ et $d_\lambda, \nu(\lambda)$ comme ci-dessus. Fixons un diagramme de Diamond $D(\overline{\rho}, r)$ et supposons que les valeurs de $x(\delta^i(\lambda))$ pour tout $0 \leq i \leq d_\lambda - 1$ sont comme en (22) du théorème 4.7. Alors (où l'on rappelle que ξ est défini en (1))*

$$\nu(\lambda) = (-1)^{\frac{d_\lambda |I(\lambda)|}{f} \sum_{j=0}^{f-1} r_j} \xi^{(f - 2|I(\lambda)|)\frac{d_\lambda}{f}}.$$

Remarque 5.6. *Avec les notations de [4, §6], on voit que pour l'orbite c_i de $\delta = \delta_{\text{réd}}$ contenant λ, l'ensemble J_i ($\subseteq \mathcal{S}$) correspondant à λ est juste $\{j \in \mathcal{S} | \lambda_j(x_j) = p - 2 - x_j\} = \delta(I(\lambda))$, d'où (car $J_i \cap \delta(J_i) = \emptyset$) :*

$$h_i \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} |(J_i \cup \delta(J_i)) \backslash (J_i \cap \delta(J_i))| = |J_i| = |I(\lambda)|.$$

Donc le théorème 5.5 donne exactement la valeur privilégiée de $\nu(\lambda)$ comme dans [4, Thm. 6.4].

On suppose dans le reste du § que $J_{\overline{\rho}} = \emptyset$, ce qui entraîne que $\mathcal{D}(\overline{\rho}) = \{\tau(\emptyset) = (r_0, \cdots, r_{f-1})\}$, et que $D(\overline{\rho})$ s'injecte dans $\mathrm{Inj}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)} \tau(\emptyset)$. La définition suivante est analogue à celle de S dans le lemme 5.3.

Définition 5.7. *On définit un morphisme $R : D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)} = (\mathrm{Inj}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)} \tau(\emptyset))^{I_1(\mathcal{O}_L)} \to \tau(\emptyset)^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ de la façon suivante : si $w(\lambda) \in D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ est un vecteur propre de $I(\mathcal{O}_L)$ de caractère χ correspondant à un $\lambda \in \mathcal{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$, on pose (cf. [8, Prop. 2.7])*

$$R(w(\lambda)) := \sum_{t \in \mathbb{F}_q} \Big(\prod_{j \in \mathcal{R}(\lambda)} \sigma_0(t)^{p^j(p-1-r_j)} \Big) \begin{pmatrix} [t] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} w(\lambda)$$

où $\mathcal{R}(\lambda) := \{i \in \mathcal{S} | \lambda_i(x_i) \in \{x_i, x_i - 1, x_i + 1\}\}$.

Avec l'opérateur R, la proposition 2.6 se récrit sous la forme (en notant que le vecteur $w(\lambda)$ correspondant à $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)v(\lambda)$ et que p agit trivialement sur π qui contient $D(\overline{\rho})$) :

$$R\big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)w(\lambda)\big) = x(\lambda)^{-1}R(w(\lambda)). \tag{24}$$

Notons d'ailleurs que si $\lambda \in \mathcal{PD}^{\mathrm{ss}}(x_0, \cdots, x_{f-1})$, alors $\mathcal{R}(\lambda) = \mathcal{S}\backslash\delta(I(\lambda))$ et $\mathcal{R}(\lambda^{[s]}) = \delta(I(\lambda))$.

Lemme 5.8. *Soient $\lambda \in \mathcal{PD}^{\mathrm{ss}}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ et $w(\lambda)$ un vecteur propre de caractère χ correspondant à λ. On a la relation suivante :*

$$(R \circ S)(w(\lambda)) = x(\lambda)^{-1}y(\lambda)R(w(\lambda))$$

où $y(\lambda) = (-1)^{Y(\lambda)}$ avec

$$Y(\lambda) = 1 + \sum_{j\in\delta(I(\lambda))} p^j(p-2-r_j) + \sum_{j\in\delta^2(I(\lambda))} p^j(r_j+1) + e(\lambda)(r_0, \cdots, r_{f-1}).$$

Démonstration. Par (24), il suffit de montrer que $(R \circ S)(w(\lambda)) = y(\lambda)R(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)w(\lambda))$. Comme $\mathcal{R}(\lambda) = \mathcal{S}\backslash\delta(I(\lambda))$ pour $\lambda \in \mathcal{PD}^{\mathrm{ss}}(x_0, \cdots, x_{f-1})$, la dernière formule s'écrit explicitement :

$$\sum_{t\in\mathbb{F}_q}\Big(\prod_{j\notin\delta^2(I(\lambda))} \sigma_0(t)^{p^j(p-1-r_j)}\Big)\begin{pmatrix} [t] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\sum_{\mu\in\mathbb{F}_q}\sigma_0(\mu)^{s(\lambda)}\begin{pmatrix} [\mu] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}w(\lambda)$$
$$= y(\lambda)\sum_{t\in\mathbb{F}_q}\Big(\prod_{j\in\delta(I(\lambda))} \sigma_0(t)^{p^j(p-1-r_j)}\Big)\begin{pmatrix} [t] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}w(\lambda).$$

Les deux termes donnant le même caractère, il suffit de déterminer le scalaire $y(\lambda)$. En utilisant la formule

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} [t] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [\mu] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & [t] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ si } \mu = 0 \\ &= \begin{pmatrix} [t]+[\mu^{-1}] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [\mu] & 1 \\ 0 & -[\mu^{-1}] \end{pmatrix} \text{ si } \mu \neq 0,\end{aligned}$$

et en notant que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} [\mu] & 1 \\ 0 & -[\mu^{-1}] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}w(\lambda) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -[\mu^{-1}] & 0 \\ p & [\mu] \end{pmatrix}w(\lambda) \\ &= (-\sigma_0(\mu))^{-\sum_{j=0}^{f-1}p^j\lambda_j(r_j)}(-1)^{e(\lambda)(r_0,\cdots,r_{f-1})}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}w(\lambda),\end{aligned}$$

on obtient par un calcul facile :

$$y(\lambda) = (-1)(-1)^{-s(\lambda)}(-1)^{e(\lambda)(r_0,\cdots,r_{f-1})}$$

où le premier facteur (-1) provient du fait que $\sum_{\mu\in\mathbb{F}_q^\times}\mu^0 = -1$. Cela donne exactement $(-1)^{Y(\lambda)}$ comme dans l'énoncé d'après le lemme 5.3(iii). $\square$

Démonstration du théorème 5.5. Remarquons d'abord que $\nu(\lambda)$ est aussi l'unique scalaire qui rend égale l'équation suivante :

$$(R \circ S^{d_\lambda})(w(\lambda)) = \nu(\lambda) \cdot R(w(\lambda)).$$

En appliquant le lemme 5.8 successivement, on obtient

$$\nu(\lambda) = \prod_{i=0}^{d_\lambda - 1} x(\delta^i(\lambda))^{-1} y(\delta^i(\lambda)). \tag{25}$$

Le théorème 4.7 appliqué au cas $J_{\overline{\rho}} = \emptyset$ implique

$$x(\delta^i(\lambda)) = (-1) \frac{\sqrt[f]{\xi}^{|I(\delta^i(\lambda))|}}{\sqrt[f]{\xi}^{|\mathcal{S} \setminus I(\delta^i(\lambda))|}} \frac{\prod_{j \in I(\delta^i(\lambda))} (r_j + 1) \mu_{f-j}}{\prod_{j \in I(\delta^{i+1}(\lambda))} (r_j + 1) \mu_{f-j}},$$

d'où (en notant que $|I(\delta^i(\lambda))| = |I(\lambda)|$)

$$\prod_{i=0}^{d_\lambda - 1} x(\delta^i(\lambda)) = (-1)^{d_\lambda} \frac{1}{\sqrt[f]{\xi}^{d_\lambda (f - 2|I(\lambda)|)}} = (-1)^{d_\lambda} \xi^{-(f - 2|I(\lambda)|) \frac{d_\lambda}{f}}.$$

D'autre part, le lemme 5.8 implique $\prod_{i=0}^{d_\lambda - 1} y(\delta^i(\lambda)) = (-1)^Y$ avec

$$\begin{aligned}
Y &= \sum_{i=0}^{d_\lambda - 1} Y(\delta^i(\lambda)) \\
&= \sum_{i=0}^{d_\lambda - 1} \Big[1 + \sum_{j \in \delta^{i+1}(I(\lambda))} p^j (p - 2 - r_j) + \sum_{j \in \delta^{i+2}(I(\lambda))} p^j (r_j + 1) + e(\delta^i(\lambda))(r_0, \cdots, r_{f-1}) \Big] \\
&= d_\lambda + \sum_{i=0}^{d_\lambda - 1} p^j (p-1) + \sum_{i=0}^{d_\lambda - 1} e(\delta^i(\lambda))(r_0, \cdots, r_{f-1}) \\
&\equiv d_\lambda + \sum_{i=0}^{d_\lambda - 1} e(\delta^i(\lambda))(r_0, \cdots, r_{f-1}) \mod 2.
\end{aligned}$$

On vérifie de la définition (voir [8, §2]) que

$$e(\lambda)(r_0, \cdots, r_{f-1}) = \sum_{j \in I(\lambda)} p^j (-1) + \sum_{j \in \delta(I(\lambda))} p^j (r_j + 1)$$

d'où

$$\sum_{i=0}^{d_\lambda - 1} e(\delta^i(\lambda))(r_0, \cdots, r_{f-1}) = \sum_{i=0}^{d_\lambda - 1} \sum_{j \in I(\delta^i(\lambda))} p^j r_j \equiv \frac{d_\lambda |I(\lambda)|}{f} (\sum_{j=0}^{f-1} r_j) \mod 2.$$

Le résultat s'en déduit de (25). $\square$

Remarque 5.9. *Le théorème 4.7 ne permet que de calculer $\nu(\lambda)$ lorsque $J_{\overline{\rho}} = \emptyset$. En effet, pour pouvoir l'appliquer, il faut que tous les poids $\tau(\delta^i(\lambda))$ (où $\lambda \in \mathcal{PD}^{\mathrm{ss}}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ et $0 \le i \le d_\lambda - 1$) apparaissent dans une même composante $D_\tau(\overline{\rho})$ pour $\tau \in \mathcal{D}(\overline{\rho})$. Cela demande par la proposition 2.1 que pour tout $0 \le i \le d_\lambda - 1$,*

$$J_\tau = \{ j | (\delta^i(\lambda))_j (x_j) = p - 3 - x_j \},$$

d'où deux cas : soit $J_\tau = \emptyset$ si $\lambda_j(x_j) \neq p - 3 - x_j$ pour tout j, soit $J_\tau = \mathcal{S}$ sinon, mais ce dernier cas n'est pas intéressant car $\lambda = (p - 3 - x_0, \cdots, p - 3 - x_{f-1})$ et $d_\lambda = 1$.

Rappelons $D_\ell(\overline{\rho})$ le sous-quotient de $D(\overline{\rho})$ défini dans la proposition 5.1 et notons D_ℓ le diagramme induit. Ce serait plus claire de reformuler le théorème 5.5 sous la forme suivante.

Théorème 5.10. *Supposons $J_\rho = \emptyset$ et que les valeurs de $x(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathcal{PD}^{\mathrm{ss}}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ sont comme en (22) du théorème 4.7. Alors le diagramme $D(\overline{\rho}, r)$ est extension successive de la forme (dans la catégories des diagrammes, voir [8, §9])*

$$D_0 \ — \ D_1 \ — \ \cdots \ — \ D_{\lfloor f/2 \rfloor}.$$

telle que les D_ℓ ont forcément pour paramètres cycliques les valeurs prédites dans [4, Thm. 6.4(i)].

Démonstration. Tout est clair, sauf le fait que D_ℓ disparaît si $\ell > \lfloor f/2 \rfloor$ ce qui suit la remarque 5.2. □

6 Nombre de paramètres

On détermine le nombre de paramètres pour classifier les diagrammes de Diamond associés à $\overline{\rho}$.

Choisissons d'abord une base de $D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ d'une façon relativement naturelle (notons que l'on a pas *a priori* de choix canonique). Comme $D(\overline{\rho})$ est somme directe $\oplus_{J \subseteq J_{\overline{\rho}}} D_{\tau(J)}(\overline{\rho})$ avec chaque $D_{\tau(J)}(\overline{\rho})$ indécomposable (en tant que $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$-représentation), fixer une base, disons $w(J)$, de $\tau(J)^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ va fixer la composante $D_{\tau(J)}(\overline{\rho})$. Plus précisément, on a $\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)} D_{\tau(J)}(\overline{\rho}) = \tau(J)$, d'où une injection $D_{\tau(J)}(\overline{\rho}) \hookrightarrow \mathrm{Inj}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)} \tau(J)$, et la définition 5.7 donne un morphisme

$$R : D_{\tau(J)}(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)} \to \tau(J)^{I_1(\mathcal{O}_L)}.$$

Si χ est un caractère apparaissant sur $D_{\tau(J)}(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ correspondant à $\lambda \in \mathcal{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$, on pose $w(\lambda)$ l'unique vecteur tel que

$$R(w(\lambda)) = w(J). \tag{26}$$

On obtient ainsi une base de $D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ dépendant du choix de $w(J)$ avec $J \subseteq J_{\overline{\rho}}$.

Regardons maintenant la structure du diagramme $D(\overline{\rho}, r)$, où $r : D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)} \hookrightarrow D(\overline{\rho})$ est une injection $I(\mathcal{O}_L)L^\times$-équivariante. Soit $\{\chi, \chi^s\}$ une paire de caractères apparaissant sur $D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ correspondant à $\{\lambda, \lambda^{[s]}\}$ avec $\lambda \in \mathcal{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$. On définit $x(\lambda) \in k_E^\times$ comme l'unique scalaire déterminé par l'équation

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right) w(\lambda^{[s]}) = x(\lambda) w(\lambda).$$

Comme p agit trivialement sur $D(\overline{\rho})$, on a $x(\lambda)x(\lambda^{[s]}) = 1$. Tautologiquement se donner un morphisme r est équivalent (non canoniquement) à se donner les scalaires $\{x(\lambda)\}_{\lambda \in \mathcal{PD}(x_0, \cdots, x_{f-1})}$.

Remarque 6.1. *Lorsque $\{\chi, \chi^s\}$ apparaissent tous les deux sur $D_{\tau(J)}(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ pour un $J \subseteq J_{\overline{\rho}}$, le scalaire $x(\lambda)$ n'est autre que celui de la proposition 2.6 (où λ correspond à χ). De plus, $x(\lambda)$ ne dépend que de $D(\overline{\rho}, r)$.*

Proposition 6.2. *Supposons que $\overline{\rho}$ est non scindée avec $d = |J_{\overline{\rho}}|$.*

(i) Fixons $D(\overline{\rho}, r)$ un diagramme de Diamond associé. On peut toujours choisir une base de $D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ telle que $x(\lambda) = x(\lambda^{[s]}) = 1$ pour les λ qui correspondent aux poids $\tau(J)$ avec $\emptyset \neq J \subseteq J_{\overline{\rho}}$, et les autres $x(\lambda)$ sont alors uniquement déterminés.

(ii) Les diagrammes $D(\overline{\rho}, r)$ sont paramétrés (à isomorphisme près) par les paramètres $\{x(\lambda)\}_\lambda$, à valeurs dans $k_E^\times$, vérifiant $x(\lambda)x(\lambda^{[s]}) = 1$ pour tout λ et $x(\lambda) = 1$ pour les λ correspondant aux poids $\tau(J)$ avec $\emptyset \neq J \subseteq J_{\overline{\rho}}$. Le nombre de paramètres libres parmi les $x(\lambda)$ est $2^{f-1-d}3^d - (2^d - 1)$.

Démonstration. Fixons une base $w(\emptyset)$ de $\tau(\emptyset)^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ et si $J \subseteq J_{\overline{\rho}}$ est un sous-ensemble de cardinal $\ell \geq 1$, nous allons définir une base $w(J)$ de $\tau(J)^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ à partir de $w(\emptyset)$. Soit $1 \leq m \leq f$ l'unique entier comme dans le lemme 6.3 ci-dessus. Alors $\tau(\delta^i(J)) \in \mathcal{D}(\overline{\rho})$ si $1 \leq i \leq m-1$ et $\tau(\delta^m(J)) \notin \mathcal{D}(\overline{\rho})$. Posons $w(J)$ l'unique vecteur de base de $\tau(J)^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ tel que

$$\left(R \circ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)\right)^m (w(J)) = w(J_{\overline{\rho}} \cap \delta^m(J)).$$

C'est bien défini par le lemme 6.3(ii). Notons que le cardinal de $J_{\overline{\rho}} \cap \delta^m(J)$ est strictement inférieur à ℓ.

On obtient ainsi, par récurrence sur ℓ, une base $w(J)$ pour tout $J \subseteq J_{\overline{\rho}}$ à partir de $w(\emptyset)$, ainsi qu'une base $\{\tau(\lambda)\}_\lambda$ de $D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ comme construite au début du §. Par définition, on trouve que $x(\lambda) = 1$ pour tout λ correpondant à un poids $\tau(J) \in \mathcal{D}(\overline{\rho})$ avec $J \neq \emptyset$. De plus, il n'y a plus de liberté pour les autres paramètres $x(\lambda)$ sauf que $x(\lambda)x(\lambda^{[s]}) = 1$. Comme $\dim D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)} = 2^{f-d}3^d$ et $|\mathcal{D}(\overline{\rho})| = 2^d$, le résultat s'en déduit en utilisant le lemme 6.3(iii). $\square$

Lemme 6.3. *Supposons que $\overline{\rho}$ est non scindée et que $|J_{\overline{\rho}}| = d > 1$. Soient $1 \leq i \leq d$ et $J \subseteq J_{\overline{\rho}}$ un sous-ensemble de cardinal i.*

(i) Il existe un unique entier $1 \leq m \leq f$ tel que $\delta^k(J) \subseteq J_{\overline{\rho}}$ pour $1 \leq k \leq m-1$ et $\delta^m(J) \nsubseteq J_{\overline{\rho}}$.

(ii) Si $0 \leq i \leq m-1$, notons χ_i le caractère correspondant à $\tau(\delta^i(J))$. Alors χ_i^s apparaît sur $D_{\tau(J_{\overline{\rho}} \cap \delta^{i+1}(J))}(\overline{\rho})$.

(iii) Si $\tau \in \mathcal{D}(\overline{\rho})$, alors $\tau^{[s]} \notin \mathcal{D}(\overline{\rho})$.

Démonstration. L'hypothèse entraîne que $\cup_{m=1}^f \delta^m(J) = \mathcal{S}$ d'où l'existence de m comme dans (i) puisque $J_{\overline{\rho}} \subsetneq \mathcal{S}$. Le (ii) est une conséquence des [8, Lem. 15.2,15.3]. (iii) Rappelons que $\mathcal{D}(\overline{\rho})$ s'identifie à l'ensemble $\mathcal{D}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ défini au §2. Si τ et $\tau^{[s]}$ appartiennent tous les deux à $\mathcal{D}(\overline{\rho})$, on aurait $\tau_i(x_i) \in \{x_i + 1, p - 2 - x_i\}$ pour tout $i \in \mathcal{S}$, d'où $J_\tau = \mathcal{S} \backslash J_{\tau^{[s]}}$. Cela est impossible puisque $J_\tau, J_{\tau^{[s]}} \subseteq J_{\overline{\rho}} \subsetneq \mathcal{S}$. $\square$

Traitons maintenant le cas où $\overline{\rho}$ est semi-simple, y compris aussi le cas irréductible.

Proposition 6.4. *Supposons que $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ est une représentation continue semi-simple et soit $D(\overline{\rho}, r)$ un diagramme de Diamond associé à $\overline{\rho}$ dans [8]. Alors il y a s paramètres libres à valeurs dans $k_E^\times$ pour déterminer la classe d'isomorphe de $D(\overline{\rho}, r)$ où*

$$s = \begin{cases} \frac{3^f+1}{2} - 2^f + (f+1) & \text{si } \overline{\rho} \text{ est réductible scindée} \\ \frac{3^f-1}{2} - (2^f - 1) & \text{si } \overline{\rho} \text{ est irréductible.} \end{cases}$$

Démonstration. Supposons que $\overline{\rho}$ est réductible scindée. Par [8, Thm. 15.4], $D(\overline{\rho})$ se décompose en somme directe $D(\overline{\rho}) = \oplus_{\ell=0}^{f} D_\ell(\overline{\rho})$ vérifiant

$$\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)} D_\ell(\overline{\rho}) = \bigoplus_{J\subseteq \mathcal{S}, |J|=\ell} \tau(J),$$

et le diagramme $D(\overline{\rho}, r)$ se décompose en somme directe de sous-diagrammes indécomposables

$$D(\overline{\rho}, r) = \bigoplus_{\ell=0}^{f} D_\ell(\overline{\rho}, r_\ell).$$

En utilisant le fait que $D_\ell(\overline{\rho}, r_\ell)$ est indécomposable, le même argument que celui de la proposition 6.2 montre que le nombre de paramètres libres pour classifier $D_\ell(\overline{\rho}, r_\ell)$ est :

$$\frac{1}{2}\dim D_\ell(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)} - \big(|\{J : |J| = \ell\}| - 1\big)$$

En les sommant on obtient le nombre de paramètres libres qui est (d'après [8, Prop.14.7])

$$\frac{1}{2}\dim D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)} - 2^f + (f+1).$$

Le cas irréductible se démontre de manière analogue. □

Remarque 6.5. *Il n'y a pas de choix canonique pour les paramètres dans la proposition 6.4, seulement le nombre est bien déterminé (ceux de la proposition 6.2 dans le cas réductible non scindé sont définis de manière artificielle). Dans [4], Breuil en ont trouvé certains qui sont canoniquement définis, i.e. les "paramètres cycliques". Voir aussi [3, Ex.5.8] pour l'exemple lorsque $f = 2$ et $\overline{\rho}$ est irréductible.*

Donnons l'exemple lorsque $f = 3$ pour illustrer les paramètres nous avons discuté ci-dessus.

Exemple 6.6. *Supposons $f = 3$. Selon le cardinal de $J_{\overline{\rho}}$, on a les 4 cas suivants.*

(i) Le cas où $J_{\overline{\rho}} = \emptyset$, c'est le cas traité dans [6]. Tous les paramètres sont déterminés.

(ii) Le cas où $|J_{\overline{\rho}}| = 1$. Sans perte de généralité, on suppose $J_{\overline{\rho}} = \{0\}$ de telle sorte que $\mathcal{D}(\overline{\rho}) = \{\tau(\emptyset), \tau(\{0\})\}$. Par le corollaire 2.5 et la proposition 6.2, il y a 5 paramètres libres pour déterminer le diagramme $D(\overline{\rho}, r)$ dont nous avons calculé 4. Les paramètres nous avons calculés sont les paires $\{\lambda, \lambda^{[s]}\}$ avec

$$\lambda = (x_0, x_1, x_2), \quad \lambda = (x_0, p-2-x_1, x_2+1)$$

$$\lambda = (x_0+2, p-2-x_1, x_2+1), \quad \lambda = (x_0+2, x_1, x_2).$$

(iii) Le cas où $|J_{\overline{\rho}}| = 2$. Sans perte de généralité, on suppose $J_{\overline{\rho}} = \{0, 1\}$. Par le corollaire 2.5 et la proposition 6.2, il y a 6 paramètres à déterminer dont nous avons calculé 4.

(iv) Le cas où $|J_{\overline{\rho}}| = 3$, i.e. $\overline{\rho}$ est scindée. Par le corollaire 2.5 et la proposition 6.4, il y a 10 paramètres à déterminer dont nous avons calculé 8. Notons qu'il reste exactement les 2 paramètres cycliques à déterminer, voir [4] et aussi §5.

Références

[1] L. Barthel & R. Livné, *Irreducible modular representations of* GL_2 *of a local field*, Duke Math. J. 75 (1994), 261–292.

[2] C. Breuil, *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *I*, Compositio Math. 138 (2003), 165-188.

[3] C. Breuil, *Representations of Galois and of* GL_2 *in characteristic* p, cours à l'université Columbia, 2007.

[4] C. Breuil, *Diagrammes de Diamond et* (φ,Γ)*-modules*, Israel J. Math. 182 (2011), 349-382.

[5] C. Breuil, *Sur un problème de compatibilité local-global modulo p pour* GL_2 *(avec un appendice par L. Dembélé)*, à apparaître à J. Reine Angew. Math.

[6] C. Breuil & F. Diamond, *Formes modulaires de Hilbert modulo p et valeurs d'extensions galoisiennes*, prépublication 2012.

[7] C. Breuil & A. Mézard, *Multiplicités modulaires raffinées*, à paraître à Bull. Soc. Math. de France.

[8] C. Breuil & V. Paškūnas, *Towards a modulo p Langlands correspondence for* GL_2, Memoirs of Amer. Math. Soc. 216, 2012.

[9] K. Buzzard, F. Diamond & F. Jarvis, *On Serre's conjecture for mod* ℓ *Galois representations over totally real fields*, Duke Math. J. 55 (2010), 105-161.

[10] S. Chang & F. Diamond, *Extensions of rank one* (φ,Γ)*-modules and crystalline representations*, Compositio Math. 147 (2011), 375-427.

[11] P. Colmez, *Représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *et* (φ,Γ)*-modules*, Astérisque 330 (2010), 281-509.

[12] J.-M. Fontaine & G. Laffaille, *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Scient. E.N.S. 15 (1982), 547-608.

[13] Y. Hu, *Sur quelques représentations supersingulières de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p^f})$, J. Algebra, 324 (2010), 1577-1615.

[14] D. Savitt, *On a conjecture of Conrad, Diamond, and Taylor*, Duke Math. J. 128 (2005), 141-197.

[15] D. Savitt, *Breuil modules for Raynaud schemes*, J. Number Theory 128 (2008), 2939-2950.

[16] B. Schraen, *Sur la présentation des représentations supersingulières de* $\mathrm{GL}_2(F)$, prépublication 2012.

[17] M.-F. Vignéras, *Le foncteur de Colmez pour* $\mathrm{GL}(2,F)$, Arithmetic geometry and automorphic forms, ALM 19, 531-557 (2011).

IRMAR - UMR CNRS 6625
Bâtiment 22, Campus Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France
Adresse e-mail : `yongquan.hu@univ-rennes1.fr`