Sur quelques représentations supersingulières de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p^f})$

Yongquan Hu

Université Paris-Sud Mathématiques, Bâtiment 425, 91405, Orsay, France

Abstract

Fix a prime number $p \geq 5$, an integer $f \geq 1$ and let $\mathbb{Q}_{p^f}$ be the unramified extension of $\mathbb{Q}_p$ of degree f. By [7], to a generic semi-simple continuous representation $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_{p^f}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$, we can associate a parameterized family of smooth admissible supersingular representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p^f})$ with coefficients in $\overline{\mathbb{F}}_p$. In this article, we prove that there are more parameters than those known.

Key words: représentation supersingulière, poids de Diamond

1. Introduction

Fixons p un nombre premier. Serre a conjecturé ([16]), il y a déjà 20 ans, que toute représentation continue, irréductible, impaire $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est *modulaire* au sens qu'elle provient d'une forme modulaire parabolique primitive. Dans [8], Buzzard, Diamond et Jarvis généralisent cette conjecture en remplaçant $\mathbb{Q}$ par un corps de nombres totalement réel qui est non ramifié en p. Pour notre propos, la conjecture de Buzzard-Diamond-Jarvis (abrégé par BDJ) peut se formuler grossièrement comme suit (cf. [8, conjecture 4.7]). Soient F un corps de nombres totalement réel non ramifié en p et $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ une représentation continue irréductible et totalement impaire. Pour chaque place v de F divisant p, d'après le travail de [8], on peut associer à $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_v)}$ (où F_v est le complété de F en v) un ensemble de représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(O_{F_v})$ (où O_{F_v} est l'anneau des entiers de F_v). Alors (une version de) la conjecture de BDJ dit que ce sont exactement les représentations irréductibles qui apparaissent en sous-objet dans la restriction à $\mathrm{GL}_2(O_{F_v})$ d'une certaine $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse admissible $\pi_v(\rho)$ de $\mathrm{GL}_2(F_v)$ associée à ρ.

Des résultats partiels sur la conjecture de BDJ ont été obtenus par Gee ([10]). De plus, sous une hypothèse supplémentaire sur $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_v)}$ appelée «généricité» ([7, définition 11.7]), on espère (cf. [8, remarque 4.8]) que toutes les multiplicités des représentations de $\mathrm{GL}_2(O_{F_v})$ apparaissant en sous-objet dans $\pi_v(\rho)$ sont égales à 1. On peut donc se demander si l'on peut construire abstraitement des représentations lisses admissibles de $\mathrm{GL}_2(F_v)$ dont le $\mathrm{GL}_2(O_{F_v})$-socle, i.e. la plus grande sous-$\mathrm{GL}_2(O_{F_v})$-représentation semi-simple, est exactement la somme directe des représentations irréductibles dictées par la conjecture. C'est ce qui est fait dans [7].

Notre problème étant local, on désigne désormais par F l'extension $\mathbb{Q}_{p^f}$ de $\mathbb{Q}_p$ (l'unique extension non ramifiée de degré $f \geq 1$) et O_F son anneau des entiers. On note

$$G = \mathrm{GL}_2(F), \quad K = \mathrm{GL}_2(O_F),$$

Z le centre de G, I le sous-groupe d'Iwahori de K, N le normalisateur de I dans G, et $I_1 \subset I$ (resp. $K_1 \subset K$) le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures (resp. égales à l'identité modulo p.

Soit $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ une représentation continue semi-simple générique et telle que $p \in Z$ agisse trivialement sur $\det(\rho)$. Notons $\mathcal{D}(\rho)$ l'ensemble des représentations irréductibles de K sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, ou de manière équivalente de K/K_1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, associé à ρ dans [8]. On appelle *poids de Diamond* les éléments de $\mathcal{D}(\rho)$. À partir de $\mathcal{D}(\rho)$, on peut construire une famille de diagrammes (au sens de [7, §9]) $D(\rho, r) = (D_0(\rho), D_1(\rho), r)$ comme suit (en faisant agir $p \in Z$ trivialement) :

(i) $D_0(\rho)$ est la plus grande représentation de K/K_1 telle que $\mathrm{soc}_K(D_0(\rho))$, le K-socle de $D_0(\rho)$, est isomorphe à $\oplus_{\sigma\in\mathcal{D}(\rho)}\sigma$ et telle que chaque $\sigma \in \mathcal{D}(\rho)$ n'apparaît qu'une fois dans D_0

(ii) $D_1(\rho)$ est l'unique représentation de N sur $D_0(\rho)^{I_1}$ qui étend l'action de I

(iii) $r : D_1(\rho) \hookrightarrow D_0(\rho)$ est une injection I-équivariante arbitraire.

Puis, avec une telle r fixée, on obtient par un résultat de [7, §9] une famille de représentations lisses admissibles $\pi(\rho, r)$ de G telles que

- $\mathrm{soc}_K\pi(\rho, r) = \mathrm{soc}_K D_0(\rho)$
- $D(\rho, r)$ s'injecte dans $(\pi(\rho, r)^{K_1}, \pi(\rho, r)^{I_1}, \mathrm{can})$ en tant que diagrammes
- $\pi(\rho, r)$ est engendrée par $D_1(\rho)$ en tant que G-représentation.

On dira que $\pi(\rho, r)$ est une représentation de G associée à $D(\rho, r)$. Cette procédure est loin d'être canonique et il n'est pas facile de déterminer si deux représentations obtenues ainsi sont isomorphes.

Fixons un diagramme $D(\rho, r)$ et une représentation $\pi(\rho, r)$ de G qui lui est associée comme ci-dessus. On s'intéresse aux questions suivantes :

(Q1) La représentation $\pi(\rho, r)$ est-elle uniquement déterminée par le diagramme $D(\rho, r)$? Autrement dit, si $\pi'(\rho, r)$ est une autre représentation de G associée à $D(\rho, r)$, est-ce que l'on a

$$\pi(\rho, r) \cong \pi'(\rho, r)?$$

(Q2) Est-ce que l'on a un isomorphisme de diagrammes :

$$(\pi(\rho, r)^{K_1}, \pi(\rho, r)^{I_1}, \mathrm{can}) \cong (D_0(\rho), D_1(\rho), r)?$$

(Q3) Si ρ est réductible semi-simple, on sait que le diagramme $D(\rho, r)$ se décompose en une somme directe de sous-diagrammes (voir [7, §15], on précise que f est le degré de F sur $\mathbb{Q}_p$)

$$D(\rho, r) = \oplus_{\ell=0}^{f} D(\rho, r_\ell) = \oplus_{\ell=0}^{f}(D_{0,\ell}(\rho), D_{1,\ell}(\rho), r_\ell).$$

La représentation $\pi(\rho, r)$ est-elle aussi une somme directe de sous-représentations $\{\pi_\ell,\ 0 \le \ell \le f\}$ vérifiant (au moins) la condition $\mathrm{soc}_K(\pi_\ell) = \mathrm{soc}_K(D_{0,\ell}(\rho))$?

Si $f = 1$, alors les réponses à (Q1)-(Q3) sont positives, ce qui a été démontré dans [7]. Malheureusement, lorsque $f \ge 2$, les réponses à (Q1)-(Q3) sont toutes négatives. En particulier, le diagramme $D(\rho, r)$ *ne suffit pas* à déterminer une unique représentation lisse admissible de G. Plus précisément, on va démontrer le résultat suivant (voir théorèmes 4.8, 4.10, 4.17) :

Théorème 1.1. *On conserve les notations précédentes.*

(i) Supposons $f = 2m + 1$ avec $m \geq 1$ et ρ irréductible. Il existe deux représentations supersingulières non isomorphes de G associées au même diagramme $D(\rho, r)$.

(ii) Supposons $f = 2$ et ρ irréductible. Il existe une représentation supersingulière $\pi(\rho, r)$ (associée à $D(\rho, r)$) avec $D_0(\rho) \subsetneq \pi(\rho, r)^{K_1}$.

(iii) Supposons $f = 2m$ avec $m \geq 2$ et ρ réductible semi-simple. Il existe une représentation $\pi(\rho, r)$ qui n'est pas semi-simple.

Introduisons maintenant les principales autres notations de cet article.

Notons $\mathfrak{p} := pO_F$ l'idéal maximal de O_F et $q := p^f$ le cardinal du corps résiduel $O_F/\mathfrak{p}$. On identifie $O_F/\mathfrak{p}$ avec $\mathbb{F}_q$ qui s'injecte naturellement dans $\overline{\mathbb{F}}_p$. Pour $\lambda \in \mathbb{F}_q$ on note $[\lambda]$ le représentant multiplicatif dans O_F. Pour $a \in O_F$ on note $\overline{a} \in \mathbb{F}_q$ la reduction modulo $\mathfrak{p}$ de a.

Si $n \geq 1$, on note

$$K_n := \begin{pmatrix} 1 + \mathfrak{p}^n & \mathfrak{p}^n \\ \mathfrak{p}^n & 1 + \mathfrak{p}^n \end{pmatrix}, \quad I_n := \begin{pmatrix} 1 + \mathfrak{p}^n & \mathfrak{p}^{n-1} \\ \mathfrak{p}^n & 1 + \mathfrak{p}^n \end{pmatrix},$$

et U^+ (resp. U^-) le sous-groupe de I_1 des matrices unipotentes supérieures (resp. inférieures). Explicitement, $U^+ = \left(\begin{smallmatrix} 1 & O_F \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $U^- = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{p} & 1 \end{smallmatrix}\right)$. On pose $\mathcal{H} \subset K$ le sous-groupe des matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & [\mu] \end{smallmatrix}\right)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_q^\times$ et $Z_1 := I_1 \cap Z$ le sous-groupe des matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$ avec $a \in 1 + \mathfrak{p}$. On désigne par Π la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)$ (de sorte que N est engendré par I et Π).

Toutes les représentations considérées dans cet article sont sur des $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels. Pour celles de G, on suppose qu'elles admettent un caractère central. On désigne par $\underline{\mathrm{Rep}}_G$ (resp. $\underline{\mathrm{Rep}}_K$, $\underline{\mathrm{Rep}}_I$, etc.) la catégorie des représentations lisses de G (resp. K, I, etc.) sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Si $\chi : I \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ est un caractère, on note $\chi^s := \chi(\Pi \cdot \Pi)$. On pose $\alpha : I \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ le caractère envoyant $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ pc & d \end{smallmatrix}\right) \in I$ sur $\overline{a}\overline{d}^{-1}$. Si M est une représentation lisse de I, on note $\mathrm{Ind}_I^K M$ la $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse des fonctions $f : K \to \overline{\mathbb{F}}_p$ telles que $f(ik) = i \cdot f(k)$ ($i \in I, k \in K$) avec action à gauche de K par $(kf)(k') = f(k'k)$. Pour $k \in K$ et $m \in M$, on désigne par $[k, m]$ l'élément de $\mathrm{Ind}_I^K M$ de support Ik^{-1} et de valeur m en k^{-1}. Remarquons que Ind_I^K est un foncteur exact de la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_I$ dans $\underline{\mathrm{Rep}}_K$.

Si σ est une représentation irréductible de K sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, alors σ^{I_1} est de dimension 1 ([4, lemme 2]) et on note χ_σ le caractère donnant l'action de I sur σ^{I_1} et on note $\sigma^{[s]}$ l'unique représentation irréductible de K distincte de σ et telle que I agit sur $(\sigma^{[s]})^{I_1}$ via χ_σ^s.

Si S est une représentation lisse d'un groupe profini H (par exemple, $H = K$ ou I), on définit le socle de S, noté $\mathrm{soc}(S)$, ou plutôt $\mathrm{soc}_H(S)$, comme la plus grande sous-représentation semi-simple de S et, par récurrence (en posant $\mathrm{soc}(S) = \mathrm{soc}^1(S)$), on note $\mathrm{soc}^{i+1}(S)$ la sous-représentation de S contenant $\mathrm{soc}^i(S)$ telle que $S_i := \mathrm{soc}^{i+1}(S)/\mathrm{soc}^i(S)$ soit le socle de $S/\mathrm{soc}^i(S)$. Pareillement, on définit le radical de S, noté $\mathrm{rad}(S)$, comme la plus petite sous-représentation de S telle que le quotient $S/\mathrm{rad}(S)$ soit semi-simple. On appelle $S/\mathrm{rad}(S)$ le cosocle de S, noté $\mathrm{cosoc}(S)$. Le plus petit entier r tel que $\mathrm{soc}^r(S) = S$ ou encore $S_r = 0$ s'appelle la *longueur de Loewy* de S (cf. [1, §1, exercice 2]) et est noté $r(S)$. Par ailleurs, on écrit la filtration par le socle de S sous la forme :

$$S_0 \text{ --- } S_1 \text{ --- } \cdots \text{ --- } S_{r(S)-1}.$$

On note $I(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ le sous-groupe d'inertie de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ et on normalise l'injection du corps de classe local $\iota : F^\times \hookrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)^{\mathrm{ab}}$ de telle sorte que les uniformisantes s'envoient sur les Frobenius géométriques. Grâce à ι, on identifie les caractères lisses de $F^\times$ (resp. de $\mathcal{O}_F^\times$) dans $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ et les caractères lisses de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ (resp. de $I(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$) dans $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$. Pour $d \geq 1$, on note $w_d : I(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_{p^d}) \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ le caractère envoyant g sur $\overline{\frac{g(\sqrt[p^d-1]{p})}{\sqrt[p^d-1]{p}}} \in \mathbb{F}_{p^d}^\times \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$.

Si σ et τ sont deux poids, on dit que (σ, τ) est un couple de poids de type $(-1, j)$ (resp. $(+1, j)$) si $\mathrm{Ext}^1_K(\tau, \sigma) \neq 0$ et si l'on est dans le cas (a) (resp. (b)) du corollaire 5.6 (i), [7]. Remarquons que cela implique implicitement $f \geq 2$.

Remerciements Ce travail s'est accompli sous la direction de C. Breuil. Je le remercie chaleureusement pour avoir partagé avec moi ses idées et ses connaissances et pour toutes ses remarques. Je voudrais remercier R. Abdellatif, F. Herzig et V. Sécherre pour leurs commentaires et suggestions à la première version. Enfin, je remercie le referee pour ses nombreuses remarques et suggestions constructives.

2. Combinatoire de K-représentations

Dans ce paragraphe, on étudie la structure de certaines K-représentations et on généralise [7, lemme 18.4].

2.1. Rappels et compléments

Toute représentation irréductible de K sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est triviale sur K_1 (cf. [4, proposition 4]), donc est une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \cong K/K_1$. Un *poids* (ou *poids de Serre*) est par définition une telle représentation. Tout poids est, à isomorphisme près, de la forme (cf. [4, proposition 1])

$$(\mathrm{Sym}^{r_0}\overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes (\mathrm{Sym}^{r_1}\overline{\mathbb{F}}_p^2)^{\mathrm{Fr}} \otimes \cdots \otimes (\mathrm{Sym}^{r_{f-1}}\overline{\mathbb{F}}_p^2)^{\mathrm{Fr}^{f-1}}) \otimes \eta$$

où les r_i sont des entiers entre 0 et $p-1$, η est un caractère lisse de $\mathcal{O}_F^\times$ dans $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ vu comme un caractère de K via le déterminant $\det : K \to \mathcal{O}_F^\times$, et $\mathrm{Fr} : \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ est le Frobenius donné par $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a^p & b^p \\ c^p & d^p \end{smallmatrix}\right)$. On notera cette représentation $(r_0, \cdots, r_{f-1}) \otimes \eta$.

D'autre part, un caractère lisse de I dans $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ est trivial sur I_1, donc est un caractère de $\mathcal{H} \cong I/I_1$. On voit facilement que tout caractère de I peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} \mapsto \overline{a}^{\sum_{i=0}^{f-1} p^i r_i} \eta(ad)$$

avec r_i et η comme précédemment. Par abus de notation, on note ce caractère $(r_0, \cdots, r_{f-1}) \otimes \eta$. On vérifie que

$$((r_0, \cdots, r_{f-1}) \otimes \eta)^s = (p-1-r_0, \cdots, \cdots, p-1-r_{f-1}) \otimes \det^{\sum_{i=0}^{f-1} p^i r_i} \eta.$$

Notation : ici et dans la suite, si $k \in \mathbb{Z}$ et si $\eta : \mathcal{O}_F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ est un caractère, on écrit $\det^k \eta$ au lieu de $\overline{\det}^k \otimes \eta \circ \det$, le caractère de K donné par $g \mapsto (\overline{\det g})^k \eta(\det g)$.

Notation : Comme $(0, \cdots, 0) \otimes \eta \cong (p-1, \cdots, p-1) \otimes \eta$, lorsque l'on écrit un caractère de I sous la forme $(r_0, \cdots, r_{f-1}) \otimes \eta$, on demande que les r_i ne sont pas tous égaux à $p-1$.

Si $\sigma = (r_0, \cdots, r_{f-1}) \otimes \eta$ est un poids, alors le caractère $\chi = \chi_\sigma$ qui donne l'action de I sur σ^{I_1} est exactement le caractère $(r_0, \cdots, r_{f-1}) \otimes \eta$ ([7, §2]). Par réciprocité de Frobenius, le morphisme $\chi \hookrightarrow \sigma|_I$ correspond à une surjection K-équivariante $\mathrm{Ind}_I^K \chi \twoheadrightarrow \sigma$. De même, on dispose d'une injection K-équivariante $\sigma \hookrightarrow \mathrm{Ind}_I^K \chi^s$. La structure précise de $\mathrm{Ind}_I^K \chi$ ou de $\mathrm{Ind}_I^K \chi^s$ a été étudiée dans [11]. On rappelle le résultat en suivant la formulation donnée dans [7].

Soient $(x_0, \cdots, x_{f-1})$ f variables. On définit $\mathcal{P}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ comme l'ensemble des f-uplets $\lambda := (\lambda_0(x_0), \cdots, \lambda_{f-1}(x_{f-1}))$ où $\lambda_i(x_i) \in \mathbb{Z} \pm x_i$ est défini comme suit. Si $f = 1$, $\mathcal{P}(x_0) = \{x_0, p-1-x_0\}$. Si $f > 1$, alors :

(i) $\lambda_i(x_i) \in \{x_i, x_i - 1, p-2-x_i, p-1-x_i\}$ pour $i \in \{0, \cdots, f-1\}$

(ii) si $\lambda_i(x_i) \in \{x_i, x_i - 1\}$, alors $\lambda_{i+1}(x_{i+1}) \in \{x_{i+1}, p-2-x_{i+1}\}$

(iii) si $\lambda_i(x_i) \in \{p-2-x_i, p-1-x_i\}$, alors $\lambda_{i+1}(x_{i+1}) \in \{p-1-x_{i+1}, x_{i+1}-1\}$

avec les conventions $x_f := x_0$ et $\lambda_f(x_f) := \lambda_0(x_0)$.

Pour $\lambda \in \mathcal{P}(x_0, \cdots, x_{f-1})$, on définit

$$e(\lambda) := \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=0}^{f-1} p^i(x_i - \lambda_i(x_i))\Big) \quad \text{si } \lambda_{f-1}(x_{f-1}) \in \{x_{f-1}, x_{f-1}-1\}$$

$$e(\lambda) := \frac{1}{2}\Big(p^f - 1 + \sum_{i=0}^{f-1} p^i(x_i - \lambda_i(x_i))\Big) \quad \text{sinon.}$$

Le résultat de [11] se reformule alors ainsi :

Lemme 2.1. *Les sous-quotients irréductibles de* $\mathrm{Ind}_I^K \chi$ *ou* $\mathrm{Ind}_I^K \chi^s$ *sont exactement les poids :*

$$(\lambda_0(r_0), \cdots, \lambda_{f-1}(r_{f-1})) \otimes \det{}^{e(\lambda)(r_0, \cdots, r_{f-1})}\eta$$

pour $\lambda \in \mathcal{P}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ *en oubliant les* λ *tels qu'il existe* $0 \leq i \leq f-1$ *vérifiant* $\lambda_i(r_i) < 0$.

Démonstration. Voir [7, lemme 2.2]. □

Pour $\lambda \in \mathcal{P}(x_0, \cdots, x_{f-1})$, on définit

$$J(\lambda) := \{i \in \{0, \cdots, f-1\} |\ \lambda_i(x_i) \in \{p-2-x_i, p-1-x_i\}\}. \tag{1}$$

D'après le lemme 2.1, si τ est un sous-quotient irréductible de $\mathrm{Ind}_I^K \chi^s$, il existe un unique $\lambda \in \mathcal{P}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ tel que $\lambda_i(r_i) \geq 0$ pour tout $i \in \{0, \cdots, f-1\}$ et tel que

$$\tau = (\lambda_0(r_0), \cdots, \lambda_{f-1}(r_{f-1})) \otimes \det{}^{e(\lambda)(r_0, \cdots, r_{f-1})}\eta.$$

On dit que λ est le f-uplet correspondant à τ et on pose $J(\tau) := J(\lambda)$.

D'autre part, le lemme 2.1 montre que $\mathrm{Ind}_I^K \chi^s$ est de multiplicité 1. Par conséquent, si τ est un sous-quotient irréductible de $\mathrm{Ind}_I^K \chi^s$, alors il existe une unique sous-K-représentation de $\mathrm{Ind}_I^K \chi^s$, notée $U(\tau)$, dont le cosocle est τ. Pour le voir, soit $\mathrm{Inj}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)}\tau$ une enveloppe injective de τ dans la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)}$, vue comme une représentation lisse de K en faisant agir K_1 trivialement. Comme la représentation $\mathrm{Ind}_I^K \chi^s$ est triviale sur K_1 et comme τ y apparaît avec multiplicité 1, on déduit de [1, §5, exercice 2] que le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_K(\mathrm{Inj}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)}\tau, \mathrm{Ind}_I^K \chi^s)$ est de dimension 1. On prend pour $U(\tau)$ l'image d'un tel morphisme non nul et la propriété que $\mathrm{cosoc}_K(U(\tau)) = \tau$ résulte de [1, §6, théorème 6].

On peut déterminer la structure de $U(\tau)$ à l'aide de $J(\tau)$:

Lemme 2.2. *(i) Si $\chi = \chi^s$, alors* $\mathrm{Ind}_I^K \chi^s = \sigma \oplus \sigma^{[s]}$. *En particulier, on a $U(\sigma) = \sigma$ et $U(\sigma^{[s]}) = \sigma^{[s]}$.*

(ii) Si $\chi \neq \chi^s$, alors les sous-quotients irréductibles de $U(\tau)$ sont les poids $\tau' \in \mathrm{JH}(\mathrm{Ind}_I^K \chi^s)$ tels que $J(\tau') \subset J(\tau)$. En particulier, $\mathrm{soc}_K(\mathrm{Ind}_I^K \chi^s) = \sigma$.

Démonstration. Voir [7, lemme 2.3] pour (i) et [7, théorème 2.4] pour (ii). □

Si j est un entier entre 0 et $f-1$, on note $E_j(\chi)$ l'extension non triviale de dimension 2 :

$$0 \to \chi \to E_j(\chi) \to \chi\alpha^{-p^j} \to 0 \tag{2}$$

où l'action de I est donnée, dans une base convenable $\{v, w\}$, par : si $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ pc & d \end{smallmatrix}\right) \in I$,

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} v = \chi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix}\right) v \\ \begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} w = \chi\alpha^{-p^j}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix}\right)(w + (\overline{b/d})^{p^j} v). \end{cases}$$

On vérifie que cela définit bien une I-extension non triviale de $\chi\alpha^{-p^j}$ par χ. Notons que par définition $E_j(\chi)$ est triviale sur K_1.

Si M est une I-représentation, on note $\Pi(M)$ la I-représentation définie par

$$h \cdot \Pi(v) := \Pi((\Pi^{-1} h \Pi) \cdot v), \quad h \in I. \tag{3}$$

C'est bien défini puisque Π normalise I. Notons que $\Pi(\chi) \cong \chi^s$ et $\Pi(\chi\alpha^{-p^j}) \cong \chi^s\alpha^{p^j}$, et que $\Pi(E_j(\chi))$ est triviale sur $\Pi K_1 \Pi^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1+\mathfrak{p} & O_F \\ \mathfrak{p}^2 & 1+\mathfrak{p} \end{smallmatrix}\right)$.

Remarque 2.3. *Si M' est une représentation de N (ou de G) et si $M \subset M'$ est un sous-espace vectoriel stable par I, alors l'espace $\Pi(M)$ est aussi stable par I avec l'action définie par (3).*

Lemme 2.4. *Soit χ' un caractère lisse de I.*

(i) $\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi', \chi) \neq 0$ si et seulement si $\chi' = \chi\alpha^{-p^j}$ ou $\chi' = \chi\alpha^{p^j}$ pour un $j \in \{0, \cdots, f-1\}$. Si $\chi' = \chi\alpha^{-p^j}$ (resp. $\chi' = \chi\alpha^{p^j}$) et si M est une I-extension non triviale de χ' par χ, alors $M \cong E_j(\chi)$ (resp. $M \cong \Pi(E_j(\chi^s))$).

(ii) $\mathrm{Ext}^1_{I/K_1}(\chi', \chi) \neq 0$ si et seulement si $\chi' = \chi\alpha^{-p^j}$ pour un $j \in \{0, \cdots, f-1\}$. Si $\chi' = \chi\alpha^{-p^j}$ et si M est une I/K_1-extension non triviale de χ' par χ, alors $M \cong E_j(\chi)|_{I/K_1}$.

Démonstration. Les preuves de [12, proposition 5.4 (i), lemma 5.5] qui traitent le cas $f = 1$ s'étendent au cas général en remarquant que $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} \mathrm{Hom}(O_F, \overline{\mathbb{F}}_p) = f$. □

Posons $W := \mathrm{Ind}_I^K \Pi(E_j(\chi))$ et définissons-y les vecteurs suivants (pour $0 \leq k \leq q-1$)

$$f_k = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^k \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, \Pi(v)], \quad F_k = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^k \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, \Pi(w)], \tag{4}$$

où l'on convient que $0^0 := 1$ et $0^{q-1} := 0$. On voit facilement que les vecteurs $\{f_k, F_k,\ 0 \leq k \leq q-1\}$ sont linéairement indépendants et que le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel qu'ils engendrent est stable par I.

On a les formules suivantes :

Lemme 2.5. *(i) Pour tout* $0 \leq k \leq q-1$*,* F_k *(resp.* f_k*) est un vecteur propre de* $\mathcal{H}$ *de caractère* $\chi\alpha^{-k-p^j}$ *(resp.* $\chi\alpha^{-k}$*).*

(ii) Pour tout $0 \leq k \leq q-1$*,*

$$\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} F_k = F_k + f_k.$$

(iii) On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix} F_k = \begin{cases} F_k - f_{k+2p^j} & \text{si } k + 2p^j \leq q-1 \\ F_k - f_{k+2p^j-(q-1)} & \text{si } k + 2p^j \geq q. \end{cases}$$

(iv) On a

$$\begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} F_k = \begin{cases} F_k + f_{k+p^j} & \text{si } k + p^j \leq q-1 \\ F_k + f_{k+p^j-(q-1)} & \text{si } k + p^j \geq q. \end{cases}$$

Démonstration. (i) Il découle de [7, lemme 2.5].

(ii) Il découle de l'égalité

$$\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Il découle du calcul suivant et du fait que $\lambda^{q-1} = 1$ pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_q^\times$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix} F_k &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^k \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, \Pi(w)] \\
&= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^k \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 + p[\lambda] & p \\ -p[\lambda^2] & 1 - p[\lambda] \end{pmatrix} [1, \Pi(w)] \\
&= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^k \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ([1, \Pi(w)] - \lambda^{2p^j}[1, \Pi(v)]) \\
&= F_k - \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{k+2p^j} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, \Pi(v)].
\end{aligned}$$

(iv) Analogue à (iii), il découle du calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} F_k &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^k \begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, \Pi(w)] \\
&= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^k \begin{pmatrix} [\lambda](1+p) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} [1, \Pi(w)] \\
&= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^k \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p[\lambda] & 1 \end{pmatrix} [1, \Pi(w)] \\
&= F_k + \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{k+p^j} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, \Pi(v)].
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.6. *Soit $R \in W$ une combinaison linéaire des vecteurs F_k et f_k ($0 \leq k \leq q-1$), c'est-à-dire, R s'écrit sous la forme*

$$R = \sum_{0\leq k\leq q-1} a_k F_k + \sum_{0\leq k\leq q-1} b_k f_k$$

avec $a_k, b_k \in \overline{\mathbb{F}}_p$. Si $a_k \neq 0$ (resp. $b_k \neq 0$), alors F_k (resp. f_k) appartient à $\langle I \cdot R\rangle$, la sous-I-représentation de W engendrée par R.

Démonstration. On peut réécrire R sous la forme $R = \sum_{0\leq k\leq q-2} R_k$ avec

$$R_0 = a_{q-1}F_{q-1} + a_0F_0 + b_{p^j}f_{p^j}, \quad R_{q-1-p^j} = a_{q-1-p^j}F_{q-1-p^j} + b_{q-1}f_{q-1} + b_0f_0,$$

et $R_k = a_kF_k + b_{k+p^j}f_{k+p^j}$ si $k \notin \{0, q-1-p^j\}$. Alors, par le lemme 2.5 (i), les R_k sont des vecteurs propres de $\mathcal{H}$ de caractères distincts l'un de l'autre. Le cardinal de $\mathcal{H}$ étant premier à p, on en déduit que R_k appartient à $\langle I \cdot R\rangle$ pour tout $0 \leq k \leq q-2$.

Supposons $k \notin \{0, q-1-p^j\}$. Si $a_k \neq 0$, le lemme 2.5 (iv) entraîne que f_{k+p^j} appartient à $\langle I \cdot R\rangle$ et donc de même pour F_k. Si $a_k = 0$ et $b_{k+p^j} \neq 0$, alors $R_k = b_{k+p^j}f_{k+p^j}$ et l'énoncé est trivial.

Supposons $k = q-1-p^j$. Si $a_{q-1-p^j} \neq 0$, le lemme 2.5 (iv) entraîne que f_{q-1} appartient à $\langle I \cdot R\rangle$. Puis, on a le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} f_{q-1} &= \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} \lambda^{q-1}\begin{pmatrix}[\lambda]+1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}[1,\Pi(v)]\\
&= \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} \lambda^{q-1}\begin{pmatrix}[\lambda+1] & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ pX_\lambda & 1\end{pmatrix}[1,\Pi(v)]\\
&= \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} (\lambda-1)^{q-1}\begin{pmatrix}[\lambda] & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}[1,\Pi(v)]\\
&= f_{q-1} + \sum_{k'=0}^{q-2}\binom{q-1}{k'}(-1)^{q-1-k'}f_{k'}
\end{aligned} \tag{5}$$

où l'on a écrit $[\lambda]+1 = [\lambda+1] + pX_\lambda$ avec $X_\lambda \in \mathcal{O}_F$ dépendant de λ et où l'on a utilisé le fait que $[1,\Pi(v)]$ est fixé par $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ pX_\lambda & 1\end{smallmatrix}\right)$. Par conséquent, le vecteur $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)f_{q-1} - f_{q-1}$ s'écrit d'une combinaison linéaire des vecteurs $f_{k'}$ avec $0 \leq k' \leq q-2$ qui sont des vecteurs propres de $\mathcal{H}$ de caractères distincts l'un de l'autre, d'où $\binom{q-1}{k'}f_0 \in \langle I \cdot f_{q-1}\rangle$. Or, $\binom{q-1}{k'} \neq 0$ dans $\overline{\mathbb{F}}_p$, on en déduit $f_0 \in \langle I \cdot f_{q-1}\rangle$ et ensuite $F_{q-1-p^j} \in \langle I \cdot R\rangle$. Le même raisonnement montre que f_{q-1} appartient à $\langle I \cdot R\rangle$ si $a_{q-1-p^j} = 0$ et $b_{q-1} \neq 0$. L'énoncé est trivial dans le cas où $a_{q-1-p^j} = b_{q-1} = 0$ et $b_0 \neq 0$.

Enfin, un argument analogue permet de traiter le cas où $k = 0$. $\square$

Proposition 2.7. *Soit ω un sous-quotient irréductible de $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi\alpha^{-p^j})$. Alors il existe une unique sous-K-représentation de W, notée W_ω, telle que :*

(i) le cosocle de W_ω est isomorphe à ω ;

(ii) modulo $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi)$, l'image de W_ω est isomorphe à $U(\omega)$, définie comme étant l'unique sous-K-représentation de $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi\alpha^{-p^j})$ de cosocle ω.

Remarque 2.8. *Lorsque W est de multiplicité 1, l'unicité de W_ω est évidente. Cependant, ce n'est pas toujours le cas : par exemple, si $f = 2$, $j = 0$ et $\chi = \chi_\sigma$ avec $\sigma = (1, 0)$, alors le poids $(p-2, p-1) \otimes \det$ apparaît dans W avec multiplicité 2.*

Démonstration. Montrons l'existence de la K-représentation dans l'énoncé par le même raisonnement que l'existence de $U(\omega)$ plus haut. Soit $\mathrm{Inj}_{K/K_2}\omega$ une enveloppe injective de ω dans la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{K/K_2}$. Comme W est triviale sur K_2 et $\mathrm{Ind}_I^K\Pi(\chi\alpha^{-p^j})$ admet ω comme sous-quotient, on obtient un morphisme K-équivariant $\gamma : \mathrm{Inj}_{K/K_2}\omega \to W$ tel que le composé $\mathrm{Inj}_{K/K_2}\omega \xrightarrow{\gamma} W \to \mathrm{Ind}_I^K\Pi(\chi\alpha^{-p^j})$ est non trivial. Alors l'image de γ vérifie les conditions (i) et (ii).

Montrons l'unicité. Soit $\theta \in \mathcal{P}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ le f-uplet correspondant à ω par le lemme 2.1 et soit F le vecteur de W défini par

$$F = F_{\sum_{i\in J(\theta)} p^i(p-1-\theta_i(r_i'))} + \epsilon(\omega)\eta'(-1)[1, \Pi(w)] \tag{6}$$

avec $\epsilon(\omega) := 1$ si $\chi\alpha^{-p^j} = (\chi\alpha^{-p^j})^s$ et si ω est de dimension 1, et $\epsilon(\omega) := 0$ sinon. Par [7, lemmes 2.6 et 2.7], F est un vecteur propre de $\mathcal{H}$ de caractère χ_ω engendrant $U(\omega)$ modulo $\mathrm{Ind}_I^K\Pi(\chi)$.

Soit W' une représentation vérifiant (i) et (ii). Alors W' contient un vecteur F' qui s'écrit sous la forme

$$F' = F + af$$

où $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$ et $f \in \mathrm{Ind}_I^K\Pi(\chi)$ est un vecteur propre de $\mathcal{H}$ de même caractère que F. Le lemme 2.6 implique que $F \in W'$ et donc $\langle K \cdot F\rangle \subset W'$ (si $\epsilon(\omega) = 1$, on utilise le fait que $[1, \Pi(w)]$ est fixé par $\left(\begin{smallmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ pour déduire l'appartenance de f à W'). Cela permet de conclure que $W' = \langle K \cdot F\rangle$, car sinon on aurait $\langle K \cdot F\rangle \subset \mathrm{rad}_K(W')$ par la condition (i) et donc ω apparaîtrait dans $W'/(W' \cap \mathrm{Ind}_I^K\Pi(\chi)) \hookrightarrow \mathrm{Ind}_I^K\Pi(\chi\alpha^{-p^j})$ avec multiplicité ≥ 2, ce qui contredirait le lemme 2.1. Le corollaire s'en déduit. □

La proposition suivante sera importante pour déterminer la structure de W_ω au §2.2. Si $0 \leq k \leq q-1$, on écrit (de manière unique) $k = \sum_{0\leq i\leq f-1} p^i k_i$ avec $0 \leq k_i \leq p-1$ pour tout $0 \leq i \leq f-1$. Rappelons que $U^+ = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathcal{O}_F \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \subset I$.

Proposition 2.9. *Fixons k un entier entre 0 et $q-1$.*

(i) Dans $\mathrm{Ind}_I^K\Pi(\chi)$, la sous-$U^+$-représentation $\langle U^+ \cdot f_k\rangle$ engendrée par f_k est stable par I. Elle a une $\overline{\mathbb{F}}_p$-base formée des vecteurs suivants

$$\Big\{f_{\sum_{0\leq i\leq f-1} p^i k_i'},\ 0 \leq k_i' \leq k_i\Big\}.$$

(ii) Dans W, la sous-U^+-représentation $\langle U^+ \cdot F_k\rangle$ engendrée par F_k contient tous les vecteurs

$$\Big\{f_{\sum_{0\leq i\leq f-1} p^i k_i'},\ 0 \leq k_{j-1}' \leq p-1 \text{ et } 0 \leq k_i' \leq k_i \text{ si } i \neq j-1\Big\}.$$

Démonstration. (i) D'abord, comme f_k est fixé par K_1 et est un vecteur propre de $\mathcal{H}$, la stabilité de $\langle U^+ \cdot f_k\rangle$ par I découle de la décomposition $I = U^+K_1\mathcal{H}$. De plus, on est ramené pour le deuxième énoncé à examiner l'action sur f_k des matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ avec $\mu \in \mathbb{F}_q$. En remplaçant $q-1$ par k et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ dans le calcul (5), on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_k = \sum_{k'=0}^{k} \binom{k}{k'} (-\mu)^{k-k'} f_{k'},$$

et l'énoncé s'en déduit par le lemme 2.6 puisque $\binom{k}{k'} \neq 0$ dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ si et seulement si $k' = \sum_{0\leq i\leq f-1} p^i k_i'$ avec $0 \leq k_i' \leq k_i$ pour tout i.

(ii) Cette preuve est extraite de [7, lemme 18.4, cas -1]. D'abord, d'après (i) et le lemme 2.6, $\langle U^+ \cdot F_k\rangle$ contient le vecteur $F_{\sum_{i\neq j-1} p^i k_i}$. Puis, en utilisant le fait que

$$X_{\lambda-1} \equiv \sum_{s=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{s}}{p} (\lambda-1)^{p^{-1}s} \equiv -\sum_{s=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{s}}{p} \lambda^{p^{-1}s}(-1)^{p^{-1}(p-s)} \mod p^2$$

dont la première égalité vient de la loi d'addition dans $\mathcal{O}_F$ (voir par exemple [14, §II.6]) et la deuxième est un exercice de combinatoire, on obtient par un calcul analogue à (5) :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} F_{\sum_{i\neq j-1} p^i k_i} &= \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} (\lambda-1)^{\sum_{i\neq j-1} p^i k_i} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ pX_\lambda & 1 \end{pmatrix} [1, \Pi(w)] \\
&= \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} (\lambda-1)^{\sum_{i\neq j-1} p^i k_i} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, \Pi(w)] \\
&\quad + \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} (\lambda-1)^{\sum_{i\neq j-1} p^i k_i} \left(-\sum_{s=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{s}}{p} \lambda^{p^{j-1}s}(-1)^{p^{j-1}(p-s)} \right) \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, \Pi(v)].
\end{aligned} \tag{7}$$

On constate que le vecteur $f_{\sum_{i\neq j-1} p^i k_i + p^{j-1}(p-1)}$ n'apparaît que dans la deuxième équation (7) et son coefficient est 1. D'ailleurs, on vérifie que tout autre vecteur apparaissant dans (7) a un caractère propre de $\mathcal{H}$ différent de celui de $f_{\sum_{i\neq j-1} p^i k_i + p^{j-1}(p-1)}$. Cela permet de conclure que le vecteur $f_{\sum_{i\neq j-1} p^i k_i + p^{j-1}(p-1)}$ appartient à $\langle U^+ \cdot F_k\rangle$. Le résultat s'en déduit par (i). □

On termine cette section par le lemme suivant qui traite la représentation induite $\mathrm{Ind}_I^K E_j(\chi)$. On écrit $\chi\alpha^{-p^j}$ sous la forme $(r'_0, \cdots, r'_{f-1}) \otimes \eta'$.

Lemme 2.10. *Supposons que $r'_j \leq p-2$.*

(i) Dans $\mathrm{Ind}_I^K E_j(\chi)$, le vecteur $\sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} \left(\begin{smallmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)[1, w]$ est fixé par I_1 et engendre une sous-K-représentation irréductible isomorphe au poids $(p-1-r'_0, \cdots, p-1-r'_{f-1}) \otimes \det^{\sum_{0\leq i\leq f-1} p^i r'_i} \eta'$.

(ii) Le vecteur $\sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} \lambda^{q-1} \left(\begin{smallmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)[1, w]$ engendre entièrement $\mathrm{Ind}_I^K E_j(\chi)$ sous l'action de K.

Démonstration. Écrivons $R_0 = \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} \left(\begin{smallmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)[1, w]$, $R_{q-1} = \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} \lambda^{q-1} \left(\begin{smallmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)[1, w]$, et $\sigma' = (p-1-r'_0, \cdots, p-1-r'_{f-1}) \otimes \det^{\sum_{0\leq i\leq f-1} p^i r'_i} \eta'$.

(i) Puisque la I-représentation $E_j(\chi)$ est triviale sur K_1, l'induite $\mathrm{Ind}_I^K E_j(\chi)$ l'est aussi. Donc, pour le premier énoncé, il suffit de vérifier que le vecteur R_0 est fixé par U^+, ou encore par les matrices $\left(\begin{smallmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ avec $\mu \in \mathbb{F}_q$, ce qui découle du fait que w est fixé par $U^- = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{p} & 1 \end{smallmatrix}\right)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R_0 = \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\mu]+[\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, w] = \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\mu+\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, w] = R_0.$$

La condition $r'_j \leq p-2$ assure que le poids σ' admet un I-quotient isomorphe à $E_j(\chi)$ (par un raisonnement analogue au lemme 2.15 (ii) plus loin). Donc on obtient par réciprocité de Frobenius une injection K-équivariante $\sigma' \hookrightarrow \mathrm{Ind}_I^K E_j(\chi)$ qui envoie σ'^{I_1} vers $\overline{\mathbb{F}}_p R_0$, d'où le résultat.

(ii) En utilisant le fait que w est fixé par U^-, le calcul (5) montre que la K-représentation $\langle K\cdot R_{q-1}\rangle$ contient R_0 puis le vecteur $[1,w]$ puisque

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}[1,w] = R_0 - R_{q-1}.$$

Le résultat s'en déduit car $[1,w]$ engendre entièrement $\mathrm{Ind}_I^K E_j(\chi)$. □

2.2. La structure de W_ω

On conserve les notations du §2.1. En particulier, $\chi = \chi_\sigma$ est le caractère donnant l'action de I sur l'espace des I_1-invariants de $\sigma = (r_0,\cdots,r_{f-1})\otimes\eta$, $E_j(\chi)$ est la représentation de I définie par (2), et $W = \mathrm{Ind}_I^K\Pi(E_j(\chi))$.

Si ω est un sous-quotient irréductible de $\mathrm{Ind}_I^K\Pi(\chi\alpha^{-p^j})$, on a défini une unique sous-K-représentation W_ω de W vérifiant certaines conditions (cf. proposition 2.7). Dans [7], la structure de W_ω pour tout sous-quotient irréductible «spécial» ω de $\mathrm{Ind}_I^K\Pi(\chi\alpha^{-p^j})$ a été déterminée (voir [7, définition 17.2 et lemme 18.4]). Nous allons généraliser ce résultat. Commençons par un lemme facile.

Lemme 2.11. *Écrivons $\chi\alpha^{-p^j}$ sous la forme $(r'_0,\cdots,r'_{f-1})\otimes\eta'$ pour des r'_i et η' convenables (uniquement déterminés en demandant que, si $\chi\alpha^{-p^j} = (\chi\alpha^{-p^j})^s$, alors $r'_i = 0$ pour tout $0\le i\le f-1$).*

(i) Si $r_j\ge 2$, alors $r'_j = r_j - 2$ et $r'_i = r_i$ pour tout $i\neq j$.

(ii) Si $r_j = 1$, alors $r'_j\in\{p-2,p-1\}$. De plus, $r'_j = p-2$ si et seulement si $r_i = 0$ pour tout $i\neq j$, auquel cas on a $\chi\alpha^{-p^j} = \chi^s$; si $r'_j = p-1$, soit j' le premier indice suivant j tel que $r_{j'}\ge 1$, alors $(r'_j,\cdots,r'_{j'}) = (p-1,p-1,\cdots,p-1,r_{j'}-1)$.

(iii) Si $r_j = 0$, alors $r'_j\in\{p-2,p-3\}$. De plus, $r'_j = p-3$ si et seulement si $r_i = 0$ pour tout $i\neq j$, i.e. $\chi = (0,\cdots,0)\otimes\eta$; si $r'_j = p-2$, soit j' le premier indice suivant j tel que $r_{j'}\ge 1$, alors $(r'_j,\cdots,r'_{j'}) = (p-2,p-1,\cdots,p-1,r_{j'}-1)$.

Démonstration. Élémentaire. □

Rappelons que, si $\lambda\in\mathcal{P}(x_0,\cdots,x_{f-1})$, alors $J(\lambda)$ est défini par (1) :

$$J(\lambda) := \{i\in\{0,\cdots,f-1\} \mid \lambda_i(x_i)\in\{p-2-x_i,p-1-x_i\}\}.$$

Lemme 2.12. *Supposons $f\ge 2$ et $\chi\neq\chi^s$. Soient ω (resp. τ) un sous-quotient irréductible de $\mathrm{Ind}_I^K\Pi(\chi\alpha^{-p^j})$ (resp. $\mathrm{Ind}_I^K\Pi(\chi)$) et $\theta\in\mathcal{P}(x_0,\cdots,x_{f-1})$ (resp. λ) le f-uplet correspondant. Écrivons $\chi\alpha^{-p^j}$ sous la forme $(r'_0,\cdots,r'_{f-1})\otimes\eta'$ comme dans le lemme 2.11.*

(i) Si $r_j\ge 2$, alors $U(\tau)\subset W_\omega$ si et seulement si $J(\lambda)\subset J(\theta)\cup\{j-1\}$.

(ii) Si $r_j\le 1$, alors $U(\tau)\subset W_\omega$ si et seulement si $J(\lambda)\subset J(\theta)\cup J'\cup\{j,j-1\}$, où

$$J' := \{i\in\{0,\cdots,f-1\} \mid r'_i = p-1, r_i = 0\}.$$

Démonstration. (i) Démontrons d'abord la direction $\Longleftarrow$. Puisque $\chi\neq\chi^s$ par hypothèse, on déduit de [7, lemme 2.7] et du lemme 2.6 que, d'une part la représentation $U(\tau)$ est engendrée par le vecteur

$$f_{\sum_{i\in J(\lambda)} p^i(p-1-\lambda_i(r_i))},$$

d'autre part W_ω contient le vecteur suivant selon le cas (cf. (6) de la preuve de la proposition 2.7 dans le premier cas) :

$$\begin{cases} F_0 + \eta'(-1)[1, \Pi(w)] & \text{si } \chi\alpha^{-p^j} = (\chi\alpha^{-p^j})^s \text{ et } \dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} \omega = 1 \\ F_{\sum_{i\in J(\theta)} p^i(p-1)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le deuxième cas, la proposition 2.9 implique que W_ω contient le vecteur $f_{\sum_{i\in J(\theta)\cup\{j-1\}} p^i(p-1)}$ et donc $U(\tau) \subset W_\omega$ dès que $J(\lambda) \subset J(\theta) \cup \{j-1\}$. Dans le premier cas, en utilisant le fait que $[1, \Pi(w)]$ est fixé par $(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$), on obtient le calcul analogue à (7) :

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1\right)(F_0 + \eta'(-1)[1, \Pi(w)]) &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1\right)F_0 \\ &= \sum_{s=1}^{p-1}\Big(-\frac{\binom{p}{s}}{p}(-1)^{p^{j-1}(p-s)}\Big)f_{p^{j-1}s}; \end{aligned}$$

par conséquent, le lemme 2.6 et la proposition 2.9 (i) impliquent que W_ω contient tous les vecteurs $f_{p^{j-1}s}$ avec $0 \le s \le p-1$, donc contient $U(\tau)$ si $J(\lambda) \subset \{j-1\}$ (notons que $J(\theta) = \emptyset$ dans ce cas).

Démontrons la direction $\Longrightarrow$: c'est-à-dire, vérifions que τ n'apparaît pas dans W_ω lorsque $J(\lambda) \not\subset J(\theta) \cup \{j-1\}$. Clairement, une condition nécessaire pour que $U(\tau)$ soit contenu dans W_ω est qu'il existe $\tau' \in \mathrm{JH}(\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi))$ et $\omega' \in \mathrm{JH}(\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi\alpha^{-p^j}))$ tels que

$$U(\tau) \subset U(\tau') \subset W_{\omega'} \subset W_\omega$$

et tels que $\mathrm{Ext}^1_K(\omega', \tau') \neq 0$. On est donc ramené à vérifier que $\mathrm{Ext}^1_K(\omega, \tau) = 0$ dès que $J(\lambda) \not\subset J(\theta) \cup \{j-1\}$. Avec cette hypothèse, soit $k \neq j-1$ un indice tel que $k \notin J(\theta)$ et $k \in J(\lambda)$. On a alors (puisque $r_j \ge 2$) :

$$\omega = (\theta_0(r_0), \cdots, \theta_j(r_j - 2), \cdots, \theta_{f-1}(r_{f-1})) \otimes \det{}^{e(\theta)(r_0, \cdots, r_j-2, \cdots, r_{f-1}) + p^j}\eta$$

et

$$\tau = (\lambda_0(r_0), \cdots, \lambda_j(r_j), \cdots, \lambda_{f-1}(r_{f-1})) \otimes \det{}^{e(\lambda)(r_0, \cdots, r_{f-1})}\eta.$$

Comme $\theta_j(x_j - 2) \notin \{\lambda_j(x_j), p-2-\lambda_j(x_j)\}$ et comme $k \neq j-1$ et $\theta_k(x_k) \neq \lambda_k(x_k)$ (par hypothèse), on voit que ω et $\tau(\lambda)$ ne satisfont à aucune condition listée dans [7, corollaire 5.5 (ii)], d'où le résultat.

(ii) Supposons maintenant $r_j \le 1$. Puisque $\chi \neq \chi^s$, le lemme 2.11 implique que $r'_j \in \{p-1, p-2\}$. D'autre part, on a par définition $r'_i = p-1$ pour $i \in J'$. On déduit donc de [7, lemme 2.7] et du lemme 2.6 que W_ω contient le vecteur

$$F_{\sum_{i\in J(\theta)\setminus(J'\cup\{j\})} p^i(p-1) + \sum_{i\in J'} p^i(p-2) + p^j(p-3)},$$

qui engendre d'après la proposition 2.9 (ii) le vecteur (notons que $j-1 \notin J'$ puisque $\chi \neq \chi^s$)

$$f_{\sum_{i\in J(\theta)\setminus(J'\cup\{j,j-1\})} p^i(p-1) + \sum_{i\in J'} p^i(p-2) + p^j(p-3) + p^{j-1}(p-1)}.$$

Puis, par notre hypothèse que $p \ge 5$ et $\chi \neq \chi^s$, on voit que ce dernier vecteur engendre $U(\tau)$ (sous l'action de K) pour tout τ vérifiant $J(\lambda) \subset J(\theta) \cup J' \cup \{j-1, j\}$.

Pour l'autre direction, on peut procéder comme dans (i). $\square$

Corollaire 2.13. *Supposons $f \geq 2$ et $\sigma = (0, \cdots, 0) \otimes \eta$ de telle sorte que $\chi = \chi^s$. Soient ω un sous-quotient irréductible de $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi\alpha^{-p^j})$ et $\theta \in \mathcal{P}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ le f-uplet correspondant. Alors on a toujours $\sigma^{[s]} \subset W_\omega$, et on a $\sigma \subset W_\omega$ si et seulement si $J(\omega) \cup \{j-1\} = \{0, \cdots, f-1\}$.*

Démonstration. Il découle du lemme 2.12 par dualité. En effet, si l'on note W^* la représentation duale de W comme dans la preuve de la proposition 2.21 (iii), alors W^* est isomorphe à l'extension non scindée

$$0 \to \mathrm{Ind}_I^K \Pi(\tilde{\chi}) \to W^* \to \mathrm{Ind}_I^K \Pi(\tilde{\chi}\alpha^{-p^j}) \to 0$$

avec $\tilde{\chi} = (0, \cdots, 0, 2_j, 0, \cdots, 0) \otimes \tilde{\eta}$ (ici, 2_j signale que 2 est à la place j) pour un certain caractère $\tilde{\eta}$ de I. On peut donc appliquer le lemme 2.12 (i) et l'énoncé s'en déduit en utilisant le fait que $U(\tau) \subset W_\omega$ si et seulement si $U(\omega^*) \subset W_{\tau^*}$ en regardant ω^* (resp. τ^*) comme un sous-quotient irréductible de $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\tilde{\chi})$ (resp. $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\tilde{\chi}\alpha^{-p^j})$). □

Le cas où $f = 1$ est plus simple et a été traité dans [5, 6] :

Lemme 2.14. *Si $f = 1$ et si ω est un sous-quotient irréductible de $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi\alpha^{-1})$, alors $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi) \subset W_\omega$.*

Démonstration. Le même argument que celui du lemme 2.12 traite le cas où $\chi \neq \chi^s$ et $\chi\alpha^{-1} \neq (\chi\alpha^{-1})^s$, i.e. $r_0 \notin \{0, 2\}$. Si $r_0 = 2$, l'énoncé se déduit de [6, lemme 11.8], qui traite en fait le cas où $r_0 \geq 2$. Enfin, le cas où $r_0 = 0$ découle par dualité du cas où $r_0 = 2$ (cf. la preuve du corollaire 2.13). □

On voit que le lemme 2.14 est compatible avec le lemme 2.12 et le corollaire 2.13.

2.3. Généralisation

Dans cette section, on généralise le lemme 2.12 à un cas plus général.

Lemme 2.15. *Soient χ un caractère lisse de I et j un entier entre 0 et $f-1$.*

(i) Si s est un entier entre 0 et $p-1$, alors il existe une unique I-représentation (à isomorphisme près), notée $E_j(\chi, s)$, qui est triviale sur K_1, unisérielle de dimension $s+1$ et dont la filtration par le socle est de la forme

$$\chi — \chi\alpha^{-p^j} — \cdots — \chi\alpha^{-p^j(s-1)} — \chi\alpha^{-p^j s}.$$

(Voir [1, §4, proposition 5] pour la notion «unisérielle».)

(ii) Le poids $\sigma = (r_0, \cdots, r_{f-1}) \otimes \eta$ contient, pour tout $0 \leq j \leq f-1$, une sous-I-représentation isomorphe à $E_j(\chi_\sigma, r_j)$.

Démonstration. (i) Pour l'existence de $E_j(\chi, s)$, il suffit de prendre la sous-I-représentation de $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi)$ engendrée par le vecteur

$$f_{p^j s} = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{p^j s} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, \Pi(v)],$$

où v est un vecteur de base de χ. Le fait que cette représentation satisfait aux conditions demandées découle de la proposition 2.9 (i) et du lemme 2.5 (i).

Par le lemme 2.4 (ii), si $0 \leq i < s \leq p-1$, on a

$$\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} \mathrm{Ext}^1_{I/K_1}(\chi\alpha^{-p^j s}, \chi\alpha^{-p^j i}) = \begin{cases} 1 & i = s-1 \\ 0 & i \neq s-1. \end{cases}$$

L'unicité de la représentation $E_j(\chi, s)$ s'en déduit par récurrence sur s.

(ii) Le poids σ s'injecte dans $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi_\sigma)$ et, par [7, lemme 2.7], contient le vecteur $f_{p^j r_j}$ si les $\{r_i,\ i \neq j\}$ ne sont pas tous nuls. L'énoncé dans ce cas s'en déduit d'après la proposition 2.9 (i). Dans le cas où $r_i = 0$ pour tout $i \neq j$, σ contient le vecteur $f_{p^j r_j} + \eta(-1)[1, \Pi(v)]$, et il suffit de remarquer que $[1, \Pi(v)]$ est fixé par I_1 pour se ramener au cas précédent. □

Supposons $f \geq 2$ jusqu'à la fin de cette section. Si s est un entier entre 0 et $p-2$ et si χ, χ' sont deux caractères lisses de I tels que $\chi\alpha^{-p^{j-1}(s+1)} = \chi'\alpha^{-p^j}$, on note $E_{j-1}(\chi, \chi', s+1)$ l'unique I-représentation qui rend exacte la suite suivante (notons que $E_{j-1}(\chi, s+1)$ est bien définie puisque $0 \leq s \leq p-2$)

$$0 \to E_{j-1}(\chi, \chi', s+1) \to E_{j-1}(\chi, s+1) \oplus E_j(\chi') \xrightarrow{\mathrm{pr}} \chi\alpha^{-p^{j-1}(s+1)} \to 0$$

où $\mathrm{pr} = \mathrm{pr}_1 - \mathrm{pr}_2$, avec pr_1 (resp. pr_2) la projection naturelle de $E_{j-1}(\chi, s+1)$ (resp. $E_j(\chi')$) sur $\chi\alpha^{-p^{j-1}(s+1)}$. De manière explicite, la filtration par le socle de $E_{j-1}(\chi, \chi', s+1)$ est la suivante :

$$\begin{array}{ccccccccc} \chi & — & \chi\alpha^{-p^{j-1}} & — & \cdots & \cdots & — & \chi\alpha^{-p^{j-1}(s+1)} = \chi'\alpha^{-p^j} \\ & & & & & & & | \\ & & & & & & & \chi'. \end{array}$$

Remarque 2.16. *(i) On vérifie que $E_{j-1}(\chi, \chi', s+1)$ est de dimension $s+3$ et de multiplicité 1.*

(ii) Par définition, en tant que représentation de U^+, la longueur de Loewy de $E_{j-1}(\chi, \chi', s+1)$ est égale à $s+2$, c'est-à-dire, $s+2$ est le plus petit entier r vérifiant la propriété

$$\mathrm{soc}_I^r(E_{j-1}(\chi, \chi', s+1)) = E_{j-1}(\chi, \chi', s+1).$$

La raison pour laquelle on introduit cette notation se voit dans le lemme suivant :

Lemme 2.17. *Soient (σ, τ) un couple de poids de type $(+1, j)$ et V une K-extension non triviale de τ par σ :*

$$0 \to \sigma \to V \to \tau \to 0.$$

Supposons $\sigma = (r_0, \cdots, r_{f-1}) \otimes \eta$. Alors V contient une unique sous-I-représentation isomorphe à $E_{j-1}(\chi_\sigma, \chi_\tau, r_{j-1}+1)$.

Démonstration. Remarquons d'abord que l'on a automatiquement $0 \leq r_{j-1} \leq p-2$ par [7, corollaire 5.6 (i)].

Le lemme 2.2 montre que V est un quotient de $\mathrm{Ind}_I^K \chi_\tau$. Donc, si v est un vecteur de base de χ, c'est une conséquence de la proposition 2.9 (i) que l'image dans V du vecteur

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{\sum_{i \neq j-1} p^i(p-1-r_i) + p^{j-1}(r_{j-1}+1)} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, \Pi(v)] \in \mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi_\tau)$$

est non nulle d'après [7, lemme 2.7] et engendre une sous-I-représentation de V isomorphe à $E_{j-1}(\chi_\sigma, \chi_\tau, r_{j-1}+1)$. □

Conservons les notations du lemme 2.17. On va étudier la structure de la représentation induite $W = \mathrm{Ind}_I^K \Pi(E_{j-1}(\chi_\sigma, \chi_\tau, r_{j-1}+1))$.

Soient ψ un caractère de I apparaissant dans $E_{j-1}(\chi_\sigma, \chi_\tau, r_{j-1}+1)$ et v_ψ un vecteur propre de $\mathcal{H}$ de caractère ψ. Notons E_ψ la sous-I-représentation engendrée par v_ψ et $\mathrm{rad}_I(E_\psi)$ son radical. Puisque $E_{j-1}(\chi_\sigma, \chi_\tau, r_{j-1}+1)$ est de multiplicité 1, v_ψ est unique à scalaire près de sorte que E_ψ et $\mathrm{rad}_I(E_\psi)$ sont bien définis.

Lemme 2.18. *Soit ω un sous-quotient irréductible de $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\psi)$. Il existe une unique sous-K-représentation de W, notée W_ω, telle que :*
– *le cosocle de W_ω est isomorphe à ω ;*
– *modulo $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\mathrm{rad}_I(E_\psi))$, l'image de W_ω est isomorphe à $U(\omega)$, l'unique sous-représentation de $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\psi)$ admettant ω comme cosocle.*

Démonstration. Analogue à celle de la proposition 2.7. Explicitement, W_ω est engendrée par le vecteur
$$\sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} \lambda^{\sum_{i\in J(\lambda)} p^i(p-1-\lambda_i(r_i(\psi)))} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi(v_\psi) + \epsilon(\psi)\eta(\psi)(-1)[1, \Pi(v_\psi)] \tag{8}$$
où

– $\epsilon(\psi) = 1$ si $\psi = \psi^s$ et ω est de dimension 1, et $\epsilon(\psi) = 0$ sinon

– ψ s'écrit sous la forme $(r_0(\psi), \cdots, r_{f-1}(\psi)) \otimes \eta(\psi)$

– $\lambda \in \mathcal{P}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ est l'unique f-uplet correspondant à ω.

□

On suppose que $r_j \geq 1$ dans le corollaire suivant. Cette hypothèse assure que $\psi \neq \psi^s$ pour tout caractère ψ distinct de $\chi\alpha^{-p^{j-1}(r_{j-1}+1)}$ apparaissant dans $E_{j-1}(\chi_\sigma, \chi_\tau, r_{j-1}+1)$.

Corollaire 2.19. *Soient ω un poids apparaissant dans $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi_\sigma \alpha^{-p^{j-1}(r_{j-1}+1)})$ et σ' (resp. τ') un poids apparaissant dans $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi_\sigma)$ (resp. $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi_\tau)$). Alors*
(i) $U(\sigma') \subset W_\omega$ si et seulement si $J(\sigma') \subset J(\omega) \cup \{j-2, j-1\}$;
(ii) $U(\tau') \subset W_\omega$ si et seulement si $J(\tau') \subset J(\omega) \cup \{j-1\}$.

Démonstration. On a explicitement
$$\tau = (r_0, \cdots, p-2-r_{j-1}, r_j+1, \cdots, r_{f-1}) \otimes \det{}^{p^{j-1}(r_{j-1}+1)-p^j}\eta,$$
donc (ii) est une conséquence du lemme 2.12 (i) puisque $r_j + 1 \geq 2$ (notons que ce lemme est applicable car $\chi_\tau \neq \chi_\tau^s$).

Pour (i), on peut travailler dans $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(E_{j-1}(\chi_\sigma, r_{j-1}+1))$, i.e. modulo $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi_\tau)$. Posons $t = [r_{j-1}/2]$ de sorte que l'on ait une suite exacte
$$0 \to E_{j-1}(\chi_\sigma, t) \to E_{j-1}(\chi_\sigma, r_{j-1}+1) \to E_{j-1}(\chi_\sigma \alpha^{-p^{j-1}(t+1)}, r_{j-1}-t) \to 0$$
et que le cosocle de $E_{j-1}(\chi_\sigma, t)$, isomorphe à $\chi_\sigma \alpha^{-p^{j-1}t}$, s'écrive sous la forme
$$(r'_0, \cdots, r'_{j-1}, \cdots, r'_{f-1}) \otimes \eta'$$

avec $r'_{j-1} \leq 1$, $r'_j = r_j - 1$ et $r'_i = r_i$ pour tout $i \notin \{j-1, j\}$. Le lemme 2.12 implique alors que, si ω' est un sous-quotient irréductible de $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi_\sigma \alpha^{-p^{j-1}(t+1)})$, $W_{\omega'}$ contient $U(\sigma')$ si et seulement si $J(\sigma') \subseteq J(\omega') \cup \{j-1, j-2\}$. D'autre part, si $\overline{W_\omega}$ désigne l'image de W_ω dans $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(E_{j-1}(\chi\alpha^{-p^{j-1}(t+1)}, r_{j-1} - t))$, le même lemme implique que $\overline{W_\omega}$ contient $U(\omega')$ si et seulement si $J(\omega') \subseteq J(\omega) \cup \{j-2\}$. En somme, le corollaire est prouvé. □

Exemple 2.20. *Conservons les notations du corollaire 2.19 et prenons ω comme le sous-quotient irréductible de $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi_\sigma \alpha^{-p^{j-1}(r_{j-1}+1)})$ tel que $J(\omega) = \emptyset$. Supposons de plus $r_{j-2} \neq p-1$. Alors la filtration par le socle de W_ω est de la forme :*

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\sigma^{(0)}_{\{j-1\}} & — & \sigma^{(0)}_{J} & \cdots & — & \sigma^{(t)}_{\{j-1\}} & — & \sigma^{(t)}_{J} & — & \sigma^{(t+1)}_{\emptyset} & — & \sigma^{(t+1)}_{\{j-2\}} & \cdots & — & \omega \\
| & & | & & & | & & | & & & & & & & | \\
\sigma^{(0)}_{\emptyset} & — & \sigma^{(0)}_{\{j-2\}} & \cdots & — & \sigma^{(t)}_{\emptyset} & — & \sigma^{(t)}_{\{j-2\}} & & & & & & & \tau_{\{j-1\}} \\
& & & & & & & & & & & & & & | \\
& & & & & & & & & & & & & & \tau_{\emptyset},
\end{array}$$

où

- *$t = [r_{j-1}/2]$ et $J = \{j-1, j-2\}$;*
- *si $0 \leq i \leq r_{j-1}$ et si $* \in \{\emptyset, \{j-1\}, \{j-2\}, J\}$, alors $\sigma^{(i)}_*$ désigne l'unique sous-quotient irréductible de $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi_\sigma \alpha^{-p^{j-1}i})$ tel que $J(\sigma^{(i)}_*) = *$;*
- *de même pour $\tau_\emptyset$ et $\tau_{\{j-1\}}$ mais en tant que sous-quotients irréductibles de $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi_\tau)$; en fait, on a $\tau_\emptyset = \tau$ et $\tau_{\{j-1\}} = \sigma$;*
- *on doit oublier $\sigma^{(t)}_{\{j-2\}}$ dans ce diagramme si r_{j-1} est pair.*

De manière explicite, lorsque $f \geq 3$, on a :

- *si $0 \leq i \leq t$, $\sigma^{(i)}_\emptyset = (r_0, \cdots, r_{j-2}, r_{j-1} - 2i, r_j, \cdots, r_{f-1}) \otimes \det^{p^{j-1}i}\eta$*
- *si $0 \leq i \leq t$, $\sigma^{(i)}_{\{j-2\}} = (r_0 \cdots, p-2-r_{j-2}, r_{j-1} - 1 - 2i, r_j, \cdots, r_{f-1}) \otimes \det^{p^{j-1}i + p^{j-2}(r_{j-2}+1)}\eta$*
- *si $0 \leq i \leq t$, $\sigma^{(i)}_{\{j-1\}} = (r_0, \cdots, r_{j-2}, p-2-r_{j-1}+2i, r_j - 1, \cdots, r_{f-1}) \otimes \det^{p^{j-1}(r_{j-1}+1-i)}\eta$*
- *si $0 \leq i \leq t$, $\sigma^{(i)}_J = (r_0, \cdots, p-2-r_{j-2}, p-1-r_{j-1}+2i, r_j-1, \cdots, r_{f-1}) \otimes \det^{p^{j-1}(r_{j-1}-i)+p^{j-2}(r_{j-2}+1)}\eta$*
- *si $t+1 \leq i \leq r_{j-1}$, $\sigma^{(i)}_\emptyset = (r_0, \cdots, r_{j-2}, p + r_{j-1} - 2i, r_j - 1, \cdots, r_{f-1}) \otimes \det^{p^{j-1}i}\eta$*
- *si $t+1 \leq i \leq r_{j-1}$, $\sigma^{(i)}_{\{j-2\}} = (r_0, \cdots, p-2-r_{j-2}, p + r_{j-1} - 1 - 2i, r_j - 1, \cdots, r_{f-1}) \otimes \det^{p^{j-1}i+p^{j-2}(r_{j-2}+1)}\eta$.*

On en déduit que $\sigma^{(0)}_{\{j-1\}} \cong \omega$ et pour tout $1 \leq i \leq t$:

$$\sigma^{(i)}_{\{j-1\}} \cong \sigma^{(r_{j-1}-i)}_{\emptyset}, \quad \sigma^{(i-1)}_{J} \cong \sigma^{(r_{j-1}+1-i)}_{\{j-2\}}.$$

On peut de même décrire explicitement les poids $\sigma^{(i)}_*$ lorsque $f = 2$.

2.4. K-extensions entre deux poids

On améliore le résultat de [7, corollaire 5.6] sur des K-extensions entre deux poids. Rappelons que $\sigma = (r_0, \cdots, r_{f-1}) \otimes \eta$ et $\chi = \chi_\sigma$.

Proposition 2.21. *Supposons $f \geq 2$.*

(i) Si $r_i \leq p-2$ pour tout $0 \leq i \leq f-1$, alors $\mathrm{Ext}^1_{K/Z_1}(\sigma, \sigma) = 0$.

(ii) Supposons $r_j \leq p-3$ et posons $\tau = (r_0, \cdots, r_j + 2, \cdots, r_{f-1}) \otimes \det^{-p^j}\eta$. Si $r_{j-1} \leq p-2$, alors $\mathrm{Ext}^1_K(\tau, \sigma) = 0$.

(iii) Supposons $r_j \geq 2$ et posons $\tau = (r_0, \cdots, r_j - 2, \cdots, r_{f-1}) \otimes \det^{p^j}\eta$. Si $r_{j-1} \leq p-2$, alors $\mathrm{Ext}^1_K(\tau, \sigma) = 0$.

Démonstration. (i) Par l'absurde, soit

$$0 \to V_1 \to V \to V_2 \to 0$$

une K-extension non scindée, triviale sur Z_1 et telle que $V_1 \cong V_2 \cong \sigma$. Soit $w \in V$ un vecteur propre de $\mathcal{H}$ dont l'image $\overline{w}$ dans V_2 soit fixée par I_1. Alors w est de caractère propre χ engendrant V sous l'action de K, et on a les énoncés suivants sur w :

– w n'est pas fixé par I_1 : sinon on aurait une surjection K-équivariante $\mathrm{Ind}_I^K\chi \twoheadrightarrow V$ ce qui est impossible par le lemme 2.1 ;

– w est fixé par U^+ : ceci découle du lemme 2.4 (ii) parce qu'aucun des caractères $\{\chi\alpha^{p^i},\ 0 \leq i \leq f-1\}$ n'apparaît dans $\sigma|_I$ par hypothèse ;

– w n'est pas fixé par U^- et le vecteur $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{smallmatrix}\right)w - w$ qui appartient à V_1 est non nul : par ce qui précède, le premier énoncé découle du fait que le groupe I_1 est engendré par U^+, U^- et Z_1, et le deuxième en est une conséquence : si $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{smallmatrix}\right)w = w$, alors pour tout $\mu \in \mathbb{F}_q^\times$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p[\mu] & 1 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} [\mu^{-1}] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [\mu] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w = w,$$

et w serait fixé par U^- parce que les matrices $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ p[\mu] & 1 \end{smallmatrix}\right)$ l'engendrent topologiquement ;

– w n'est pas fixé par $\left(\begin{smallmatrix} 1+\mathfrak{p} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$: la décomposition d'Iwahori (combinée avec le fait que V est fixé par K_2)

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{p}{1+pb} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+pb & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+pb} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{1+pb} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall b \in \mathcal{O}_F \tag{9}$$

montre que, si v est fixé par $\left(\begin{smallmatrix} 1+\mathfrak{p} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, il est aussi fixé par U^+ et donc appartient à $V_1^{I_1}$ ([4, lemme 2]) de telle sorte que $\overline{\mathbb{F}}_p w \oplus \overline{\mathbb{F}}_p v$ fournisse une I/Z_1-extension de χ par χ, ce qui contredit le lemme 2.4.

Soit maintenant $u \in V_1^{I_1}$ un vecteur non nul (unique à scalaire près). Puisque w est fixé par U^+, un calcul simple montre qu'il est de même pour tout vecteur $u_a = \left(\begin{smallmatrix} 1+pa & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)w - w$ (où $a \in \mathcal{O}_F$), d'où $u_a \in \overline{\mathbb{F}}_p u$ puisque $V_1^{U^+}$ est de dimension 1 d'après [4, lemme 2]. Autrement dit, $\overline{\mathbb{F}}_p u \oplus \overline{\mathbb{F}}_p w$ induit une extension non triviale de $\left(\begin{smallmatrix} 1+\mathfrak{p} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$-représentations

$$0 \to \overline{\mathbb{F}}_p u \to * \to \overline{\mathbb{F}}_p w \to 0.$$

Or, une telle extension correspond à un caractère lisse de $1 + \mathfrak{p}$ dans $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$, c'est-à-dire, il existe $j \in \{0, \cdots, f-1\}$ tel que (quitte à multiplier u par un scalaire)

$$\begin{pmatrix} 1+pa & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w = w + \frac{1}{2}\overline{a}^{p^j}u, \quad \forall a \in \mathcal{O}_F.$$

Par conséquent, la décomposition (9) donne

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = v + \overline{b}^{p^j} u,$$

et ensuite le lemme 2.4 implique que v est un vecteur propre de $\mathcal{H}$ de caractère $\chi\alpha^{-p^j}$ et que $\overline{\mathbb{F}}_p u \oplus \overline{\mathbb{F}}_p v$ fournit une I-représentation isomorphe à $E_j(\chi)$.

Somme toute, on a montré que la I-représentation $M_w = \langle I \cdot w \rangle$ est de dimension 3 dont une base est formée par $\{u, v, w\}$ et qu'elle est isomorphe à

$$0 \to E_j(\chi) \to M_w \to \chi \to 0.$$

Considérons la surjection K-équivariante $\phi : \mathrm{Ind}_I^K M_w \twoheadrightarrow V$ induite par réciprocité de Frobenius. Alors l'image de $\mathrm{Ind}_I^K(\overline{\mathbb{F}}_p u \oplus \overline{\mathbb{F}}_p v)$ dans V ne peut pas être réduit à 0 ni égaler V, donc est forcément isomorphe à V_1 de telle sorte que l'on obtienne une surjection

$$\overline{\phi} : \mathrm{Ind}_I^K \overline{\mathbb{F}}_p \overline{w} \cong \mathrm{Ind}_I^K \chi \twoheadrightarrow V_2$$

où $\overline{w}$ désigne l'image de w dans $M_w/(\overline{\mathbb{F}}_p u \oplus \overline{\mathbb{F}}_p v)$. En utilisant [7, lemme 2.7] et l'hypothèse que $r_i \neq p-1$ pour tout $0 \leq i \leq f-1$, on trouve que le noyau $\ker(\overline{\phi})$ contient le vecteur

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{\sum_{i \neq j-1} p^i(p-1)} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, \overline{w}],$$

ou de manière équivalente, $\ker(\phi)$ contient un vecteur propre de $\mathcal{H}$ s'écrivant sous la forme

$$R = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{\sum_{i \neq j-1} p^i(p-1)}([1, w] + a[1, u]) + f_v$$

pour certains $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$ et $f_v \in \mathrm{Ind}_I^K \overline{\mathbb{F}}_p v$. Un calcul comme dans la preuve de la proposition 2.9 (ii) montre que R engendre le vecteur $\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{q-1}\left(\begin{smallmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)[1, v]$, qui engendre de plus $\mathrm{Ind}_I^K(\overline{\mathbb{F}}_p u \oplus \overline{\mathbb{F}}_p v)$ par le lemme 2.10 (ii). Cela donne une contradiction et termine la démonstration.

(ii) On procède de la même façon que (i). Plus précisément, soient V une K-extension non scindée de τ par σ et $w \in V$ un vecteur propre de $\mathcal{H}$ tel que son image dans τ soit fixée par I_1. Alors on montre que w est fixé par U^+ et par $\left(\begin{smallmatrix} 1+\mathfrak{p} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et que le vecteur $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{smallmatrix}\right) w - w$ qui appartient à σ est non nul fixé par I_1. Autrement dit, le sous-espace vectoriel $\overline{\mathbb{F}}_p v \oplus \overline{\mathbb{F}}_p w$ de V est stable par I isomorphe à $\Pi(E_j(\chi^s))$, et on en déduit une surjection K-équivariante $W = \mathrm{Ind}_I^K \Pi(E_j(\chi^s)) \twoheadrightarrow V$. Après, comme dans (i), on montre que W n'admet pas de quotient isomorphe à V en utilisant le lemme 2.12 et l'hypothèse que $r_{j-1} \neq p-1$.

(iii) Il découle de (ii) par dualité. Soit V une K-extension de τ par σ. Si l'on note V^* la représentation duale de V définie par $V^* := \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(V, \overline{\mathbb{F}}_p)$ avec l'action usuelle de K (voir [1, §6]), alors V^* est une extension de σ^* par τ^*. De plus, on vérifie que σ^* (resp. τ^*) est isomorphe à σ (resp. τ) *à torsion près*, donc V^* se scinde d'après (ii) et par conséquent V se scinde aussi. $\square$

3. Combinatoire des diagrammes de Diamond génériques

Dans ce paragraphe, on rappelle la construction des diagrammes de Diamond ([7]) et on en fournit des propriétés combinatoires.

3.1. Diagrammes de Diamond génériques

Les $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations continues de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ sont classifiées à l'aide des caractères fondamentaux de Serre ω_d ($d \geq 1$). De manière explicite :

Proposition 3.1. *Soit* $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ *une représentation continue. Alors* ρ *est de l'une des formes suivantes :*

(i) ρ *est réductible et*

$$\rho|_{I(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)} \cong \begin{pmatrix} \omega_f^{\sum_{i=0}^{f-1} p^i(r_i+1)} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \eta$$

où η *est un caractère lisse de* $I(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ *qui se prolonge à* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ *et les* r_i *sont des entiers entre* -1 *et* $p-2$ *tels que* $(r_0, \cdots, r_{f-1}) \neq (p-2, \cdots, p-2)$.

(ii) ρ *est irréductible et*

$$\rho|_{I(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)} \cong \begin{pmatrix} \omega_{2f}^{\sum_{i=0}^{f-1} p^i(r_i+1)} & 0 \\ 0 & \omega_{2f}^{q\sum_{i=0}^{f-1} p^i(r_i+1)} \end{pmatrix} \otimes \eta$$

où η *est un caractère lisse de* $I(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ *qui se prolonge à* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ *et les* r_i *sont des entiers tels que* $0 \leq r_0 \leq p-1$, $-1 \leq r_i \leq p-2$ *pour* $i > 0$ *et* $(r_0, \cdots, r_{f-1}) \neq (p-2, \cdots, p-2)$.

Démonstration. Voir [6, corollaire 2.9]. □

Définition 3.2. *([7, §11]) Conservons les notations de la proposition 3.1. La représentation* ρ *est dite* générique *si* $0 \leq r_i \leq p-3$, *et* $(r_0, \cdots, r_{f-1}) \notin \{(0, \cdots, 0), (p-3, \cdots, p-3)\}$ *dans le cas réductible, ou si* $1 \leq r_0 \leq p-2$ *et* $0 \leq r_i \leq p-3$ *pour* $i > 0$ *dans le cas irréductible.*

À la représentation ρ, on peut associer un ensemble $\mathcal{D}(\rho)$ de poids, appelés *poids de Diamond* ([8]). Si ρ est de plus semi-simple et générique, on peut décrire $\mathcal{D}(\rho)$ comme suit ([7, §11]).

Soit $(x_0, \cdots, x_{f-1})$ f variables. On commence par définir deux ensembles $\mathcal{RD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ et $\mathcal{ID}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ de f-uplets $\lambda = (\lambda_0(x_0), \cdots, \lambda_{f-1}(x_{f-1}))$ où $\lambda_i(x_i) \in \mathbb{Z} \pm x_i$. On convient que $x_f = x_0$ et $\lambda_f(x_f) = \lambda_0(x_0)$ dans ce qui suit.

- Si $f = 1$, $\mathcal{RD}(x_0, \cdots, x_{f-1}) := \{x_0, p-3-x_0\}$ et $\mathcal{ID}(x_0, \cdots, x_{f-1}) := \{x_0, p-1-x_0\}$.
- Si $f > 1$, $\mathcal{RD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ est l'ensemble des λ tels que :
  (i) $\lambda_i(x_i) \in \{x_i, x_i+1, p-2-x_i, p-3-x_i\}$ pour tout $i \in \{0, \cdots, f-1\}$
  (ii) si $\lambda_i(x_i) \in \{x_i, x_i+1\}$, alors $\lambda_{i+1}(x_{i+1}) \in \{x_{i+1}, p-2-x_{i+1}\}$
  (iii) si $\lambda_i(x_i) \in \{p-2-x_i, p-3-x_i\}$, alors $\lambda_{i+1}(x_{i+1}) \in \{p-3-x_{i+1}, x_{i+1}+1\}$

  et $\mathcal{ID}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ est l'ensemble des λ tels que :

  (i) $\lambda_0(x_0) \in \{x_0, x_0-1, p-2-x_0, p-1-x_0\}$ et $\lambda_i(x_i) \in \{x_i, x_i+1, p-2-x_i, p-3-x_i\}$ si $i > 0$

(ii) si $i > 0$ et $\lambda_i(x_i) \in \{x_i, x_i + 1\}$ (resp. $\lambda_0(x_0) \in \{x_0, x_0 - 1\}$), alors $\lambda_{i+1}(x_{i+1}) \in \{x_{i+1}, p - 2 - x_{i+1}\}$

(iii) si $0 < i < f-1$ et $\lambda_i(x_i) \in \{p-2-x_i, p-3-x_i\}$, alors $\lambda_{i+1}(x_{i+1}) \in \{p-3-x_{i+1}, x_{i+1}+1\}$

(iv) si $\lambda_0(x_0) \in \{p - 1 - x_0, p - 2 - x_0\}$, alors $\lambda_1(x_1) \in \{p - 3 - x_1, x_1 + 1\}$

(v) si $\lambda_{f-1}(x_{f-1}) \in \{p - 2 - x_{f-1}, p - 3 - x_{f-1}\}$, alors $\lambda_0(x_0) \in \{p - 1 - x_0, x_0 - 1\}$.

Pour $\lambda \in \mathcal{RD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ ou $\lambda \in \mathcal{ID}(x_0, \cdots, x_{f-1})$, on pose

$$e(\lambda) := \tfrac{1}{2}(\sum_{i=0}^{f-1} p^i(x_i - \lambda_i(x_i))) \quad \text{si } \lambda_{f-1}(x_{f-1}) \in \{x_{f-1}, x_{f-1} + 1\}$$

$$e(\lambda) := \tfrac{1}{2}(p^f - 1 + \sum_{i=0}^{f-1} p^i(x_i - \lambda_i(x_i))) \quad \text{sinon.}$$

Lemme 3.3. *Supposons ρ semi-simple et générique. Si ρ vérifie (i) (resp. (ii)) de la proposition 3.1, alors $\mathcal{D}(\rho)$ est exactement l'ensemble des poids*

$$(\lambda_0(r_0), \cdots, \lambda_{f-1}(x_{f-1})) \otimes \det^{e(\lambda)(r_0,\cdots,r_{f-1})}\eta$$

pour $\lambda \in \mathcal{RD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ (resp. $\lambda \in \mathcal{ID}(x_0, \cdots, x_{f-1})$).

Démonstration. Voir [7, lemmes 11.2, 11.4]. □

On peut identifier l'ensemble $\mathcal{RD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ (resp. $\mathcal{ID}(x_0, \cdots, x_{f-1})$) avec l'ensemble des sous-ensembles $\mathcal{S}$ de $\{0, \cdots, f - 1\}$ comme suit :

– pour $\lambda \in \mathcal{RD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$, on pose $i \in \mathcal{S}$ si et seulement si $\lambda_i(x_i) \in \{p - 3 - x_i, x_i + 1\}$

– pour $\lambda \in \mathcal{ID}(x_0, \cdots, x_{f-1})$, on pose $0 \in \mathcal{S}$ si et seulement si $\lambda_0(x_0) \in \{p - 1 - x_0, x_0 - 1\}$ et, si $i > 0$ on pose $i \in \mathcal{S}$ si et seulement si $\lambda_i(x_i) \in \{p - 3 - x_i, x_i + 1\}$.

Si $\lambda \in \mathcal{RD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ (resp. $\mathcal{ID}(x_0, \cdots, x_{f-1})$), et si σ est le poids de Diamond correspondant (par le lemme 3.3), on note $\mathcal{S}_\lambda$ le sous-ensemble de $\{0, \cdots, f - 1\}$ qui lui est associé ci-dessus et on pose :

$$\ell(\sigma) := |S_\lambda|. \tag{10}$$

Lemme 3.4. *Si $\lambda, \lambda' \in \mathcal{RD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ (resp. $\mathcal{ID}(x_0, \cdots, x_{f-1})$) sont tels qu'il existe $j \in \{0, \cdots, f - 1\}$ vérifiant :*

$$\mathcal{S}_\lambda \cap (\{0, \cdots, f - 1\} \backslash \{j - 1, j\}) = \mathcal{S}_{\lambda'} \cap (\{0, \cdots, f - 1\} \backslash \{j - 1, j\}),$$

alors $\lambda_i(x_i) = \lambda'_i(x_i)$ pour tout $i \notin \{j - 2, j - 1, j\}$ (où l'on identifie $k \in \{j - 2, j - 1\}$ avec $k + f$ si $k < 0$).

Démonstration. C'est clair à partir de la définition. □

Rappelons ([7, §9]) qu'un *diagramme* est par définition un triplet (D_0, D_1, r) où D_0 est une représentation lisse de KZ, D_1 est une représentation lisse de N et $r : D_1 \to D_0$ est un morphisme IZ-équivariant. On définit des morphismes entre deux diagrammes de manière évidente et on note $\mathcal{DIAG}$ la catégorie qui en résulte.

Supposons que la représentation ρ est telle que $p \in Z$ agisse trivialement sur $\det(\rho)$. On lui associe une famille de diagrammes $D = (D_0(\rho), D_1(\rho), r)$ comme suit ([7, §13]) :

(i) $D_0(\rho)$ est la plus grande représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ (pour l'inclusion) telle que $\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)} D_0(\rho) = \oplus_{\sigma\in\mathcal{D}(\rho)}\sigma$ et telle que chaque $\sigma \in \mathcal{D}(\rho)$ n'apparaisse qu'une seule fois dans $D_0(\rho)$; on la voit comme représentation de KZ en faisant agir K_1 et $p \in Z$ trivialement ;

(ii) $D_1(\rho)$ est l'unique représentation de N sur $D_0(\rho)^{I_1}$ qui étend l'action de IZ ;

(iii) $r : D_1(\rho) \hookrightarrow D_0(\rho)$ est une injection IZ-équivariante arbitraire.

Remarquons qu'en général, il y a un nombre infini d'injections r à isomorphisme près.

Nous aurons besoin de la description explicite de $D_0(\rho)$.

Soit $(y_0, \cdots, y_{f-1})$ f variables. On définit un ensemble $\mathcal{I}(y_0, \cdots, y_{f-1})$ de f-uplets $\mu := (\mu_0(y_0), \cdots, \mu_{f-1}(y_{f-1}))$ avec $\mu_i(y_i) \in \mathbb{Z} \pm y_i$ comme suit. Si $f = 1$, $\mu_0 \in \{y_0, p-1-y_0, p-3-y_0\}$. Si $f > 1$, alors :

(i) $\mu_i(y_i) \in \{y_i, y_i - 1, y_i + 1, p-2-y_i, p-3-y_i, p-1-y_i\}$ pour $i \in \{0, \cdots, f-1\}$

(ii) si $\mu_i(y_i) \in \{y_i, y_i - 1, y_i + 1\}$, alors $\mu_{i+1}(y_{i+1}) \in \{y_{i+1}, p-2-y_{i+1}\}$

(iii) si $\mu_i(y_i) \in \{p-2-y_i, p-3-y_i, p-1-y_i\}$, alors $\mu_{i+1}(y_{i+1}) \in \{y_{i+1}-1, y_{i+1}+1, p-3-y_{i+1}, p-1-y_{i+1}\}$

avec les conventions $y_f := y_0$ et $\mu_f(y_f) := \mu_0(y_0)$.

Définition 3.5. *([7, §4]) Soient $\mu, \mu' \in \mathcal{I}(y_0, \cdots, y_{f-1})$. On dit que μ et μ' sont* compatibles *si, pour tout $0 \leq i \leq f-1$, $\mu_i(y_i)$ et $\mu'_i(y_i)$ appartiennent à la fois soit à $\{y_i, p-2-y_i, y_i+1, p-3-y_i\}$, soit à $\{y_i, p-2-y_i, y_i-1, p-1-y_i\}$.*

Pour $\lambda \in \mathcal{RD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ (resp. $\mathcal{ID}(x_0, \cdots, x_{f-1})$), on définit l'élément $\mu_\lambda \in \mathcal{I}(y_0, \cdots, y_{f-1})$ comme suit :

(i) $\mu_{\lambda,i}(y_i) := p-1-y_i$ si $\lambda_i(x_i) \in \{p-3-x_i, x_i\}$ (resp. si $i > 0$ ou, si $i = 0$ et $\lambda_0(x_0) \in \{p-2-x_0, x_0-1\}$)

(ii) $\mu_{\lambda,i}(y_i) := p-3-y_i$ si $\lambda_i(x_i) \in \{p-2-x_i, x_i+1\}$ (resp. si $i > 0$ ou, si $i = 0$ et $\lambda_0(x_0) \in \{p-1-x_0, x_0\}$).

Théorème 3.6. *On conserve les notations précédentes.*

(i) $D_0(\rho)$ se décompose en une somme directe :

$$D_0(\rho) = \bigoplus_{\sigma\in\mathcal{D}(\rho)} D_{0,\sigma}(\rho)$$

avec $\mathrm{soc}_K D_{0,\sigma}(\rho) \cong \sigma$.

(ii) Soient $\sigma \in \mathcal{D}(\rho)$ et λ le f-uplet correpondant. Alors les sous-quotients irréductibles de $D_{0,\sigma}(\rho)$ sont exactement les poids :

$$(\mu_0(\lambda_0(r_0)), \cdots, \mu_{f-1}(\lambda_{f-1}(r_{f-1}))) \otimes \det{}^{e(\mu\circ\lambda)(r_0,\cdots,r_{f-1})}\eta$$

pour $\mu \in \mathcal{I}(y_0, \cdots, y_{f-1})$ tels que μ et μ_λ soient compatibles (cf. définition 3.5) en oubliant les poids tels qu'il existe i vérifiant $\mu_i(\lambda_i(r_i)) < 0$ ou $\mu_i(\lambda_i(r_i)) > p-1$. En particulier, $D_0(\rho)$ est de multiplicité 1.

(iii) Supposons que ρ est réductible. Alors, en tant que diagramme, $D(\rho, r)$ se décompose en une somme directe de la forme (on précise que f est le degré de F sur $\mathbb{Q}_p$) :

$$D(\rho, r) = \bigoplus_{\ell=0}^{f} D_\ell(\rho, r) = \bigoplus_{\ell=0}^{f} (\oplus_{\ell(\sigma)=\ell} D_{0,\sigma}(\rho), \oplus_{\ell(\sigma)=\ell} D_{1,\sigma}(\rho), r).$$

Démonstration. Voir [7, proposition 13.4] pour (i), [*ibid.*, théorème 14.8] pour (ii), et [*ibid.*, théorème 15.4 (ii)] pour (iii). □

On voit à l'aide du théorème 3.6 que $D_{0,\sigma}(\rho)$ est de multiplicité 1 pour $\sigma \in \mathcal{D}(\rho)$. Par conséquent, si τ est un sous-quotient irréductible de $D_{0,\sigma}(\rho)$, il y a une unique sous-représentation admettant τ comme cosocle. On note cette représentation $I(\sigma, \tau)$ (au lieu de $U(\tau)$)pour accentuer que son socle est σ.

Définition 3.7. *Si S est une K-représentation de multiplicité 1 et si τ est un sous-quotient irréductible de S, on dit que τ^{I_1}* a un relèvement *dans S^{I_1}, ou que τ^{I_1}* se relève *dans S^{I_1}, si la surjection $U(\tau) \twoheadrightarrow \tau$ induit une surjection $U(\tau)^{I_1} \twoheadrightarrow \tau^{I_1}$ où $U(\tau) \subseteq S$ est l'unique sous-représentation admettant τ comme cosocle.*

Lemme 3.8. *Conservons les notations du théorème 3.6 (ii). Un sous-quotient irréductible τ de $D_{0,\sigma}(\rho)$ est tel que τ^{I_1} se relève dans $D_{0,\sigma}(\rho)^{I_1}$ si et seulement si*

$$\mu_i(y_i) \in \{p - 2 - y_i, p - 1 - y_i, y_i, y_i + 1\}$$

pour tout $0 \le i \le f - 1$.

Démonstration. Voir [7, corollaire 14.10]. □

Soient τ un poids apparaissant dans $D_{0,\sigma}(\rho)$ tel que τ^{I_1} se relève dans $D_{0,\sigma}(\rho)^{I_1}$, et $\mu \in \mathcal{I}(y_0, \cdots, y_{f-1})$ comme dans le théorème 3.6 (i). Si ρ est réductible, on définit

$$\mathcal{S}^-_{\lambda,\tau} = \mathcal{S}^-_\tau := \{i \in \mathcal{S} | \, \mu_{i-1}(\lambda_{i-1}(x_{i-1})) \in \{x_{i-1}, x_{i-1} + 1, p - 1 - x_{i-1}\}\}$$

$$\mathcal{S}^+_{\lambda,\tau} = \mathcal{S}^+_\tau := \{i \notin \mathcal{S} | \, \mu_{i-1}(\lambda_{i-1}(x_{i-1})) \in \{p - 3 - x_{i-1}, p - 2 - x_{i-1}, x_{i-1}\}\}.$$

Si ρ est irréductible, on définit $\mathcal{S}^+_{\lambda,\tau}$ et $\mathcal{S}^-_{\lambda,\tau}$ comme ci-dessus sauf que $1 \in \mathcal{S}^-_{\lambda,\tau}$ (resp. $\mathcal{S}^+_{\lambda,\tau}$) si et seulement si $1 \in \mathcal{S}_\lambda$ et $\mu_0(\lambda_0(x_0)) \in \{x_0 - 1, x_0, p - x_0\}$ (resp. $1 \notin \mathcal{S}_\lambda$ et $\mu_0(\lambda_0(x_0)) \in \{p - 2 - x_0, p - 1 - x_0, x_0 + 1\}$).

Si $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble de $\{0, \cdots, f - 1\}$, on définit $\delta_{\text{réd}}(\mathcal{S})$ (resp. $\delta_{\text{irr}}(\mathcal{S})$) comme suit : $i \in \delta_{\text{réd}}(\mathcal{S})$ si et seulement si $i + 1 \in \mathcal{S}$ (resp. si $i > 0$, $i \in \delta_{\text{irr}}(\mathcal{S})$ si et seulement si $i + 1 \in \mathcal{S}$ et $0 \in \delta_{\text{irr}}(\mathcal{S})$ si et seulement si $1 \notin \mathcal{S}$).

Lemme 3.9. *(i) Il existe un unique poids $\delta(\tau) \in \mathcal{D}(\rho)$ tel que $\tau^{[s]} \in D_{0,\delta(\tau)}(\rho)$.*

(ii) Le poids $\delta(\tau)$ correspond à $\delta_{\text{réd}}((\mathcal{S}_\lambda \backslash \mathcal{S}^-_{\lambda,\tau}) \cup \mathcal{S}^+_{\lambda,\tau})$ (resp. à $\delta_{\text{irr}}((\mathcal{S}_\lambda \backslash \mathcal{S}^-_{\lambda,\tau}) \cup \mathcal{S}^+_{\lambda,\tau})$) si ρ est réductible (resp. irréductible).

Démonstration. Le (i) est une conséquence de la construction de $D_0(\rho)$, voir [7, proposition 13.4]. Pour le (ii), voir [7, lemme 15.2]. □

3.2. Un résultat combinatoire

On conserve les notations précédentes. Dans cette section, on considère deux poids τ_1, τ_2 apparaissant dans $D_{0,\sigma}(\rho)$ tels que :

- $\tau_1^{I_1}$, $\tau_2^{I_1}$ se relèvent dans $D_{0,\sigma}(\rho)^{I_1}$
- (τ_1, τ_2) est un couple de type $(+1, j)$

et on compare le lien entre $\delta(\tau_1)$ et $\delta(\tau_2)$, ainsi que celui entre les places de τ_k ($k = 1, 2$) dans $D_{0,\delta(\tau_k)}(\rho)$. On note $\mu_k = \mu_{\tau_k} \in \mathcal{I}(y_0, \cdots, y_{f-1})$ le f-uplet associé à τ_k par le théorème 3.6 (ii), et $\theta_k = \mu_{\tau_k^{[s]}}$ celui associé à $\tau_k^{[s]}$. Notons également $\lambda_k = \lambda_{\delta(\tau_k)}$ (resp. $\mathcal{S}_{\lambda_k}$) le f-uplet (resp. le sous-ensemble de $\{0, \cdots, f-1\}$) correspondant à $\delta(\tau_k) \in \mathcal{D}(\rho)$.

Remarquons qu'il n'y a pas de tel couple (τ_1, τ_2) si $f = 1$. Supposons donc $f \geq 2$ dans la suite. On fait la convention que, si $j - 1 < 0$ (resp. $j + 1 > f - 1$, etc.), on l'identifie à l'entier $j - 1 + f$ (resp. $j + 1 - f$, etc.).

Donnons la liste de toutes les possibilités pour le couple (τ_1, τ_2) considéré

Lemme 3.10. *(i) On a $\mu_{1,i}(y_i) = \mu_{2,i}(y_i)$ si $i \notin \{j-1, j\}$ et deux possibilités si $i \in \{j-1, j\}$:*

- *ou bien $\mu_{\lambda,j}(y_j) = p - 3 - y_j$ et*

$$(\mu_{1,j-1}(y_{j-1}), \mu_{1,j}(y_j)) = (y_{j-1}, y_j)$$

$$(\mu_{2,j-1}(y_{j-1}), \mu_{2,j}(y_j)) = (p - 2 - y_{j-1}, y_j + 1);$$

- *ou bien $\mu_{\lambda,j}(y_j) = p - 1 - y_j$ et*

$$(\mu_{1,j-1}(y_{j-1}), \mu_{1,j}(y_j)) = (y_{j-1}, p - 2 - y_j)$$

$$(\mu_{2,j-1}(y_{j-1}), \mu_{2,j}(y_j)) = (p - 2 - y_{j-1}, p - 1 - y_j).$$

(ii) On a $\theta_{1,i}(\lambda_{1,i}(r_i)) = \theta_{2,i}(\lambda_{2,i}(r_i))$ si $i \notin \{j-1, j\}$, et

$$\theta_{1,j}(\lambda_{1,j}(r_j)) = \theta_{2,j}(\lambda_{2,j}(r_j)) + 1$$

$$\theta_{1,j-1}(\lambda_{1,j-1}(r_{j-1})) + \theta_{2,j-1}(\lambda_{2,j-1}(r_{j-1})) = p.$$

Démonstration. (i) Le premier énoncé est facile à vérifier à l'aide du théorème 3.6 (ii). Pour le deuxième, d'après le lemme 3.8, on sait que pour tout $0 \leq i \leq f - 1$,

$$\mu_{1,i}(y_i), \mu_{2,i}(y_i) \in \{p - 2 - y_i, p - 1 - y_i, y_i, y_i + 1\}.$$

Comme $\mu_{2,j}(y_j) = \mu_{1,j}(y_j) + 1$, on en déduit que :

$$\mu_{2,j}(y_j) \in \{p - 1 - y_j, y_j + 1\}.$$

Si $\mu_{\lambda,j}(y_j) = p - 3 - y_j$, alors la condition de compabilité (définition 3.5) entraîne que $\mu_{2,j}(y_j) = y_j + 1$, et donc $\mu_{1,j}(y_j) = y_j$. Par définition de $\mathcal{I}(y_0, \cdots, y_{f-1})$ et puisque $\mu_{1,j-1}(y_{j-1}) = p - 2 - \mu_{2,j-1}(y_{j-1})$, on en déduit que $\mu_{1,j-1}(y_{j-1}) = y_{j-1}$ et $\mu_{2,j-1}(y_{j-1}) = p - 2 - y_{j-1}$.

De même, si $\mu_{\lambda,j}(y_j) = p - 1 - y_j$, alors $\mu_{2,j}(y_j) = p - 1 - y_j$, et les autres énoncés sont immédiats.

(ii) Par définition, on a les égalités suivantes pour tout $0 \leq i \leq f-1$:

$$\theta_{1,i}(\lambda_{1,i}(r_i)) + \mu_{1,i}(\lambda_i(r_i)) = p-1$$

$$\theta_{2,i}(\lambda_{2,i}(r_i)) + \mu_{2,i}(\lambda_i(r_i)) = p-1.$$

On conclut donc en utilisant (i) : $\mu_{1,i}(y_i) = \mu_{2,i}(y_i)$ si $i \notin \{j-1, j\}$ et que

$$\mu_{1,j}(y_j) = \mu_{2,j}(y_j) - 1, \ \ \mu_{1,j-1}(y_{j-1}) = p-2-\mu_{2,j-1}(y_{j-1}).$$

$\square$

Si $\mu \in \mathcal{I}(y_0, \cdots, y_{f-1})$, on définit :

$$\mathcal{S}(\mu) := \{i \in \{0, \cdots, f-1\} | \ \mu_i(x_i) \in \{p-2-x_i - \pm 1, x_i \pm 1\}\}.$$

(*Attention* : ne pas confondre avec $\mathcal{S}_\lambda$ où $\lambda \in \mathcal{ID}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ ou $\mathcal{RD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$!) On constate que, si $\mu, \mu' \in \mathcal{I}(y_0, \cdots, y_{f-1})$ sont tels que $\mu_i(y_i) = \mu'_i(y_i)$, alors $i+1 \in \mathcal{S}(\mu)$ si et seulement si $i+1 \in \mathcal{S}(\mu')$.

Proposition 3.11. *(i) Si $i \notin \{j-1, j\}$, alors $i \in \mathcal{S}_{\lambda_1}$ si et seulement si $i \in \mathcal{S}_{\lambda_2}$; si $i \in \{j-1, j\}$, alors $i \in \mathcal{S}_{\lambda_1}$ si et seulement si $i \notin \mathcal{S}_{\lambda_2}$.*

(ii) $\lambda_{1,i}(x_i) = \lambda_{2,i}(x_i)$ si et seulement si $i \notin \{j-2, j-1, j\}$;

(iii) Si $i \neq j-1$, alors $i \in \mathcal{S}(\theta_1)$ si et seulement si $i \in \mathcal{S}(\theta_2)$; si $i = j-1$, alors $i \in \mathcal{S}(\theta_1)$ si et seulement si $i \notin \mathcal{S}(\theta_2)$.

Démonstration. On prouve la proposition pour le cas réductible, le cas irréductible étant analogue.

(i) Par le lemme 3.10 (i) et la définition de $\mathcal{S}^+_{\lambda,\tau_k}$ (resp. $\mathcal{S}^-_{\lambda,\tau_k}$), on voit que

$$\mathcal{S}^+_{\lambda,\tau_1} \cap (\{0, \cdots, f-1\} \backslash \{j, j+1\}) = \mathcal{S}^+_{\lambda,\tau_2} \cap (\{0, \cdots, f-1\} \backslash \{j, j+1\})$$
$$\mathcal{S}^-_{\lambda,\tau_1} \cap (\{0, \cdots, f-1\} \backslash \{j, j+1\}) = \mathcal{S}^-_{\lambda,\tau_2} \cap (\{0, \cdots, f-1\} \backslash \{j, j+1\}).$$

Par conséquent, si $i \notin \{j-1, j\}$, alors $i \in \mathcal{S}_{\lambda_1}$ si et seulement si $i \in \mathcal{S}_{\lambda_2}$ d'après le lemme 3.9 (ii).

Considérons le cas $i = j$. On a deux possibilités :

(a) Si $j+1 \in \mathcal{S}_\lambda$, i.e., $\lambda_{j+1}(x_{j+1}) \in \{p-3-x_{j+1}, x_{j+1}+1\}$, alors par définition

$$\lambda_j(x_j) \in \{p-2-x_j, p-3-x_j\}$$

et on a donc deux sous-cas :

– Si $\lambda_j(x_j) = p-2-x_j$, alors $\mu_{\lambda,j}(y_j) = p-3-y_j$, et donc, d'après le lemme 3.10 (i), on a $\mu_{1,j}(y_j) = y_j$ et $\mu_{2,j}(y_j) = y_j+1$. On vérifie à partir de la définition que $j+1 \notin \mathcal{S}^-_{\lambda,\tau_1}$ et $j+1 \in \mathcal{S}^-_{\lambda,\tau_2}$, ce qui donne, en rappelant que $\mathcal{S}_{\lambda_i} = \delta_{\text{réd}}((\mathcal{S}_\lambda \backslash \mathcal{S}^-_{\lambda,\tau_i}) \cup \mathcal{S}^+_{\lambda,\tau_i})$,

$$j \in \mathcal{S}_{\lambda_1}, \ \ j \notin \mathcal{S}_{\lambda_2}.$$

– Si $\lambda_j(x_j) = p-3-x_j$, alors $\mu_{\lambda,j}(y_j) = p-1-y_j$, et donc, par le lemme 3.10 (i), on a $\mu_{1,j}(y_j) = p-2-y_j$ et $\mu_{2,j}(y_j) = p-1-y_j$. On vérifie alors à partir de la définition que

$$j \notin \mathcal{S}_{\lambda_1}, \ \ j \in \mathcal{S}_{\lambda_2}.$$

(b) Si $j+1 \notin \mathcal{S}_\lambda$, alors $\lambda_j(x_j) \in \{x_j, x_{j+1}\}$. On a également deux sous-cas à distinguer et le même argument donne :

– si $\lambda_j(x_j) = x_j$, alors $\mu_{\lambda,j}(y_j) = p-1-y_j$, et puis $j \in \mathcal{S}_{\lambda_1}$, $j \notin \mathcal{S}_{\lambda_2}$;

– si $\lambda_j(x_j) = x_j + 1$, alors $\mu_{\lambda,j}(y_j) = p-3-y_j$, et puis $j \notin \mathcal{S}_{\lambda_1}$, $j \in \mathcal{S}_{\lambda_2}$.

Ceci permet de conclure dans le cas où $i = j$.

Le même raisonnement (plus facile) donne, lorsque $i = j-1$:

$$j-1 \in \mathcal{S}_{\lambda_1} \iff j-1 \notin \mathcal{S}_{\lambda_2}.$$

(ii) Par (i), on a :

$$\mathcal{S}_{\lambda_1} \cap (\{0, \cdots, f-1\} \backslash \{j-1, j\}) = \mathcal{S}_{\lambda_2} \cap (\{0, \cdots, f-1\} \backslash \{j-1, j\}),$$

donc d'après le lemme 3.4, on a $\lambda_{1,i}(x_i) = \lambda_{2,i}(x_i)$ si $i \notin \{j-2, j-1, j\}$. De plus, (i) implique $\lambda_{1,i}(x_i) \neq \lambda_{2,i}(x_i)$ si $i \in \{j-1, j\}$. Il reste donc à vérifier que $\lambda_{1,j-2}(x_{j-2}) \neq \lambda_{2,j-2}(x_{j-2})$, ce qui est une conséquence de la définition et de (i) pour $j-1$.

(iii) La conclusion pour $i \notin \{j-2, j-1, j\}$ est triviale puisqu'alors $\theta_{1,i}(y_i) = \theta_{2,i}(y_i)$.

On suppose que $f \geq 3$, le cas $f = 2$ étant conséquence de [7, §16]. On a donc $j+1 \notin \{j-1, j\}$, et d'après (i), $j+1 \in \mathcal{S}_{\lambda_1}$ si et seulement si $j+1 \in \mathcal{S}_{\lambda_2}$. On en déduit, puisque $\lambda_{1,j}(x_j) \neq \lambda_{2,j}(x_j)$, que

$$\lambda_{1,j}(x_j) = \lambda_{2,j}(x_j) \pm 1.$$

Ensuite, comme $\theta_{1,j}(y_j), \theta_{2,j}(y_j) \in \{p-2-y_j, p-1-y_j, y_j, y_j+1\}$, le fait que $\theta_{1,j}(\lambda_{1,j}(r_j)) = \theta_{2,j}(\lambda_{2,j}(r_j)) + 1$ (lemme 3.10 (ii)) implique que :

$$\theta_{1,j}(y_j) = \theta_{2,j}(y_j).$$

Ceci permet de conclure dans le cas $i = j$. Le cas $i = j-2$ s'en déduit puisque $\theta_{1,j-3}(y_{j-3}) = \theta_{2,j-3}(y_{j-3})$ (même si $f = 3$).

Il reste à vérifier que $j-1 \in \mathcal{S}(\theta_1)$ si et seulement si $j-1 \notin \mathcal{S}(\theta_2)$. Ceci est une conséquence de ce que l'on a prouvé et du fait suivant (facile à vérifier) : *si $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{I}(y_0, \cdots, y_{f-1})$ sont tels que pour tout $0 \leq i \leq f-1$:*

$$\theta_{1,i}(y_i), \theta_{2,i}(y_i) \in \{p-2-y_i, p-1-y_i, y_i, y_i+1\},$$

alors $\theta_1 = \theta_2$ si et seulement si $\mathcal{S}(\theta_1) = \mathcal{S}(\theta_2)$. □

Soit τ un poids apparaissant dans $D_{0,\sigma}(\rho)$. Par réciprocité de Frobenius, on a une surjection naturelle $\mathrm{Ind}_I^K \chi_\tau^s \twoheadrightarrow I(\delta(\tau), \tau^{[s]})$ de telle sorte que $\delta(\tau)$ correspond à un élément $\xi \in \mathcal{P}(y_0, \cdots, y_{f-1})$. Rappelons que

$$J(\xi) = \{i \in \{0, \cdots, f-1\} |\, \xi_i(y_i) \in \{p-2-y_i, p-1-y_i\}\}.$$

On vérifie facilement que

$$i \in J(\xi) \iff \theta_i(y_i) \in \{y_i, y_i+1\} \iff i+1 \notin \mathcal{S}(\theta).$$

Corollaire 3.12. *Avec les notations de la proposition 3.11 et ξ_i étant l'élément correspondant à $\delta(\tau_i)$ comme ci-dessus ($i = 1, 2$), on a :*

$$J(\xi_1) \cap (\{0, \cdots, f-1\} \backslash \{j-2\}) = J(\xi_2) \cap (\{0, \cdots, f-1\} \backslash \{j-2\})$$

et que $j-2 \in J(\xi_1)$ si et seulement si $j-2 \notin J(\xi_2)$.

Démonstration. C'est une simple traduction de la proposition 3.11 (iii). □

4. Constructions de représentations supersingulières

Si ρ est une représentation continue générique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ telle que $p \in F^\times$ agisse trivialement sur $\det(\rho)$, on lui a associé une famille de diagrammes $D(\rho, r)$ (§3.1). Par [7, théorème 9.8], on peut aussi lui associer un ensemble non vide de représentations lisses admissibles de G. On note $S(\rho, r)$ l'ensemble des représentations obtenues de cette façon (associées à $D(\rho, r)$). Lorsque $f = 1$, il est connu ([7, §20]) que $S(\rho, r)$ est réduit à un singleton, c'est-à-dire, à isomorphisme près le diagramme $D(\rho, r)$ détermine une unique représentation de G par la construction. L'objet de ce paragraphe est de montrer que ce n'est plus vrai lorsque $f \geq 2$: choisir un r ne suffit pas à déterminer une unique représentation lisse admissible de G associée à ρ.

4.1. Préliminaires

Dans cette section, on donne une construction générale de représentations lisses admissibles de G (à partir d'une telle représentation fixée) . Elle sera utilisée dans les sections suivantes.

On fixe π une représentation lisse admissible de G telle que $p \in F^\times$ agisse trivialement. Soit Ω une représentation lisse admissible de G telle que $\pi \hookrightarrow \Omega$ et telle que $\Omega|_K$ soit isomorphe à $\mathrm{Inj}_K \mathrm{soc}_K(\pi)$, une enveloppe injective de $\mathrm{soc}_K(\pi)$ dans la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_K$.

Soient M une sous-I-représentation de π de dimension finie et $v \in M$ un vecteur propre de $\mathcal{H}$ tel que v n'appartienne pas à $\mathrm{rad}_I(M)$. Un tel vecteur toujours existe puisque $\mathrm{rad}_I(M) \subsetneq M$. Soit χ le caractère donnant l'action de I sur $\overline{\mathbb{F}}_p v$. Notons $\overline{v}$ l'image de v dans $M/\mathrm{rad}_I(M)$ et

$$\beta : M \twoheadrightarrow M/\mathrm{rad}_I(M) \twoheadrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p \overline{v}$$

la projection naturelle avec $\ker\beta$ son noyau. Supposons que (M, v) satisfait aux conditions suivantes :

(S1) $v \notin \Sigma(M)$, où $\Sigma(M)$ est la sous-I-représentation de Ω engendrée par $\ker\beta$, $\Pi(M)$, Ω^{I_1}.

(S2) Il existe $h \in \Omega^{I_1}$ un vecteur non nul propre de $\mathcal{H}$ de caractère χ^s.

Alors, à partir des données (π, Ω, M, v, h), on va construire une famille de représentations lisses admissibles de G comme suit.

Étape 1. Soit V_χ une sous-I-représentation de Ω qui est isomorphe à $\mathrm{Inj}_I \chi$ et telle que :

$$V_\chi^{I_1} = \overline{\mathbb{F}}_p \Pi(h).$$

(V_χ existe parce que $\overline{\mathbb{F}}_p \Pi(h) \hookrightarrow \Omega$ et $\Omega|_I$ est un object injectif dans $\underline{\mathrm{Rep}}_I$.) Alors l'injection $\overline{\mathbb{F}}_p v \hookrightarrow \Omega/\Sigma(M)$ induit, par injectivité de V_χ, un morphisme $\Omega/\Sigma(M) \to V_\chi$ qui envoie l'image $\overline{v}$ de v vers $\Pi(h)$. En le composant avec les morphismes naturels, on obtient un endomorphisme I-équivariant de Ω que l'on note ϕ :

$$\phi : \Omega \twoheadrightarrow \Omega/\Sigma(M) \to V_\chi \hookrightarrow \Omega,$$

On note Φ l'ensemble des ϕ ainsi construits.

Remarque 4.1. *(i) Il existe en général beaucoup de tels endomorphismes ϕ.*

(ii) Puisque $\Omega^{I_1} \subset \ker\phi$, pour tout $v \in \Omega$, il existe $n \gg 0$ dépendant de v tel que $\phi^n(v) = 0$. Par conséquent, pour tout $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$, $1 + a\phi$ est un automorphisme de Ω dont l'inverse est $\sum_{n=0}^{\infty} (-a\phi)^n$.

Étape 2 : On définit, pour tout $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$, une action de la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sur Ω :

$$\begin{array}{rccc} \Pi_{\phi,a} : & \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ & x & \longmapsto & (1+a\phi)^{-1} \cdot \Pi \cdot (1+a\phi)(x). \end{array} \tag{11}$$

On vérifie facilement que $\Pi_{\phi,a}$ est I-équivariant et que $(\Pi_{\phi,a})^2 = \mathrm{Id}_\Omega$.

Comme $\overline{\mathbb{F}}_p\Pi(v) + \Omega^{I_1} \subset \Sigma(M) \subset \ker\phi$, on a par définition :

$$\begin{aligned} \Pi_{\phi,a}(v) &= (1+a\phi)^{-1}\Pi(v + a\Pi(h)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-a\phi)^n(\Pi(v) + ah) \\ &= \Pi(v) + ah. \end{aligned}$$

Ce calcul montre aussi que, si $x \in \Omega$ vérifie à la fois que $x \in \ker(a\phi)$ et $\Pi(x) \in \ker(a\phi)$, alors $\Pi_{\phi,a}(x) = \Pi(x)$. En particulier, $\Pi_{\phi,0} = \Pi$.

Étape 3 : Puisque $\Pi_{\phi,a}$ définit une action de la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sur Ω compatible avec l'action de I, on obtient d'après [7, §9] une représentation lisse admissible de G que l'on note $(\Omega, \Pi_{\phi,a})$, ou simplement $\Omega_{\phi,a}$, telle que

$$\Omega_{\phi,a}|_{KZ} = \Omega|_{KZ} = \mathrm{Inj}_K \mathrm{soc}_K(\pi).$$

On définit $\pi_{\phi,a}$ comme la sous-G-représentation de $\Omega_{\phi,a}$ engendrée par $M + \pi^{I_1}$.

Évidemment, les représentations $\{\pi_{\phi,a},\ \phi \in \Phi, a \in \overline{\mathbb{F}}_p\}$ de G associées à π comme ci-dessus sont lisses admissibles, admettant un caractère central. Bien sûr, ces représentations $\pi_{\phi,a}$ ne sont pas forcément non isomorphes. Quand même, on verra dans §4.2 et §4.3 que sous des conditions supplémentaires sur (π, M, v, h), on aura $\pi_{\phi,a} \ncong \pi$ avec a bien choisi.

Donnons un critère pour que (M, v) vérifie les conditions (S1) et (S2). Pour S une I-représentation de dimension finie, notons $r^+(S)$ (resp. $r^-(S)$) la longueur de Loewy de S en tant que U^+-représentation (resp. U^--représentation).

Lemme 4.2. *(i) Soit $\langle I \cdot v\rangle \subset M$ la sous-représentation engendrée par v. Si*

$$r^+(\langle I \cdot v\rangle) > \max\{r^-(M), r^+(\ker(\beta))\}, \tag{12}$$

alors (M, v) satisfait à (S1).

(ii) Soit σ un poids apparaissant dans $\mathrm{soc}_K(\pi)$. Alors χ^s apparaît dans $(\mathrm{Inj}_K\sigma)^{I_1}$ si et seulement si σ apparaît dans la représentation $\mathrm{Ind}_I^K\chi^s$. S'il en est ainsi, alors la multiplicité de χ^s dans $(\mathrm{Inj}_K\sigma)^{I_1}$ est égale à 1.

Démonstration. (i) Par hypothèse on a en particulier $r^+(\langle I\cdot v\rangle) > 1$ puisque $r^-(M) \geq 1$. D'autre part, il résulte de la définition que $r^-(M) = r^+(\Pi(M))$, que $r^+(S + S') = \max\{r^+(S), r^+(S')\}$ pour deux I-représentations S et S' de dimension finie et que $r^+(S) \leq r^+(S')$ si $S \subset S'$. Le résultat s'en déduit en utilisant la condition (12) car par définition $\Sigma(M) = \Pi(M) + \ker(\beta) + \Omega^{I_1}$ et que $r^+(\Omega^{I_1}) = 1$.

(ii) C'est une conséquence de la réciprocité de Frobenius : χ^s s'injecte dans $\mathrm{Inj}_K\sigma$ si et seulement s'il existe un morphisme K-équivariant non trivial $\mathrm{Ind}_I^K\chi^s \to \mathrm{Inj}_K\sigma$. Le dernier énoncé découle du fait que $(\mathrm{Inj}_K\sigma)^{I_1}$ est de multiplicité 1 (cf. [7, §4]). $\square$

4.2. Les cas $f \geq 3$

Soient $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ une représentation continue générique (cf. définition 3.2) telle que $p \in F^\times$ agit trivialement sur $\det(\rho)$ et $D(\rho, r)$ un diagramme de Diamond associé. Dans cette section, on montre que l'ensemble $S(\rho, r)$ de représentations lisses admissibles de G associé à $D(\rho, r)$ n'est pas réduit à un singleton lorsque $f \geq 3$.

Supposons donc $f \geq 3$. Supposons de plus que :
(I) ou bien $f = 2m + 1$ avec $m \geq 1$ et ρ est irréductible,
(II) ou bien $f = 2m + 2$ avec $m \geq 1$ et ρ est réductible semi-simple.
On fixe $\pi \in S(\rho, r)$ une représentation de G associée à $D(\rho, r)$.

Lemme 4.3. *Sous les hypothèses précédentes, il existe un poids $\sigma \in \mathcal{D}(\rho)$ tel que $\sigma^{[s]} \in \mathcal{D}(\rho)$ et tel que*

$$\mu_\lambda = (p - 3 - y_0, \cdots, p - 3 - y_{f-1}),$$

où $\lambda \in \mathcal{ID}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ ou $\mathcal{RD}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ est le f-uplet correspondant à σ et où $\mu_\lambda \in \mathcal{I}(y_0, \cdots, y_{f-1})$ est le f-uplet associé à λ défini au §3.1.

Démonstration. Il suffit de prendre σ comme le poids de Diamond correspondant à
– dans le cas (I),

$$\lambda = (p - 1 - x_0, x_1 + 1, p - 2 - x_2, \cdots, x_{2m-1} + 1, p - 2 - x_{2m});$$

– dans le cas (II),

$$\lambda = (x_0 + 1, p - 2 - x_1, \cdots, x_{2m} + 1, p - 2 - x_{2m+1}).$$

L'énoncé concernant μ_λ est alors direct par définition (cf. §3.1). □

On fixe un poids σ comme dans le lemme 4.3. D'après le théorème 3.6 (ii), pour tout $1 \leq j \leq f - 1$, il existe un poids τ_j apparaissant dans $D_{0,\sigma}(\rho)$ tel que (σ, τ_j) soit un couple de type $(+1, j)$. De manière explicite, τ_j est le sous-quotient irréductible de $D_{0,\sigma}(\rho)$ correspondant à

$$(\cdots, y_{j-2}, p - 2 - y_{j-1}, y_j + 1, y_{j+1}, \cdots) \in \mathcal{I}(y_0, \cdots, y_{f-1}).$$

Pour simplifier les notations, on fixe $j \in \{0, \cdots, f - 1\}$ et on pose $\tau = \tau_j$.

Rappelons que $\delta(\tau)$ désigne l'unique poids de Diamond tel que $\tau^{[s]}$ soit un sous-quotient irréductible de $D_{0,\delta(\tau)}(\rho)$. Puisque $\delta(\tau)$ est un sous-quotient irréductible de $\mathrm{Ind}_I^K \chi_\tau^s$, on peut lui associer un f-uplet $\xi \in \mathcal{P}(x_0, \cdots, x_{f-1})$ (§2.1) tel que, si l'on écrit $\tau = (s_0, \cdots, s_{f-1}) \otimes \eta$, alors

$$\delta(\tau) = (\xi_0(s_0), \cdots, \xi_{f-1}(s_{f-1})) \otimes \det^{e(\xi)(s_0, \cdots, s_{f-1})}\eta.$$

Corollaire 4.4. *Dans le cas (I) ou (II), on a $J(\xi) = \{0, \cdots, f - 1\} \backslash \{j - 2\}$ (où l'on identifie $j - 2$ avec $j - 2 + f$ si $j - 2 < 0$).*

Démonstration. C'est une conséquence du corollaire 3.12 en remarquant que $J(\delta(\sigma)) = J(\sigma^{[s]}) = \{0, \cdots, f - 1\}$ et que (σ, τ) est un couple de type $(+1, j)$. □

Rappelons que (§3.1) $I(\sigma, \tau)$ désigne l'unique sous-représentation de $D_{0,\sigma}(\rho)$ qui admet τ comme cosocle. Dans notre cas, $I(\sigma, \tau)$ est isomorphe à l'unique extension non triviale de τ par σ. D'après le lemme 2.17, la K-représentation $I(\sigma, \tau) \subset D_{0,\sigma}(\rho)$ contient une unique sous-I-représentation M_τ isomorphe à $E_{j-1}(\chi_\sigma, \chi_\tau, r'_{j-1} + 1)$ si l'on écrit

$$\sigma = (r'_0, \cdots, r'_j, \cdots, r'_{f-1})$$

à torsion près. On pose $\chi' := \chi_\tau \alpha^{-p^j}$ et

$$W := \mathrm{Ind}_I^K \Pi(M_\tau) \cong \mathrm{Ind}_I^K \Pi(E_{j-1}(\chi_\sigma, \chi_\tau, r'_{j-1} + 1)).$$

Corollaire 4.5. *Soit ω un sous-quotient irréductible de $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi')$. Alors la K-représentation W_ω (cf. lemme 2.18) admet $\sigma^{[s]} = \delta(\sigma)$ et $\delta(\tau)$ comme sous-représentations si et seulement si*

$$\{0, \cdots, f-1\} \backslash \{j-1, j-2\} \subset J(\omega).$$

Démonstration. C'est une conséquence des corollaires 2.19 et 4.4. □

Lemme 4.6. *(i) Il existe un poids de Diamond σ' tel que $\chi' = \chi_{\sigma'}$. Si l'on note λ' le f-uplet correspondant à σ', alors $|\ell(\lambda') - \ell(\lambda)| = 1$.*

(ii) Soit $v_\tau \in M_\tau$ un vecteur propre non nul de $\mathcal{H}$ de caractère χ'. Posons

$$F_0 := \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi(v_\tau) \in \pi.$$

Alors ou bien $F_0 = 0$, ou bien $\langle K \cdot F_0 \rangle$ est irréductible isomorphe à σ'.

Démonstration. (i) Remarquons que si l'on écrit $\chi' = \chi_\tau \alpha^{-p^j}$ sous la forme $(s_0, \cdots, s_{f-1}) \otimes \eta'$, alors $0 \leq s_j \leq p-3$. Soit σ' l'unique poids de dimension $\leq q-2$ tel que $\chi_{\sigma'} = \chi'$. On vérifie que (σ, σ') est un couple de type $(-1, j)$ et que σ' n'apparaît pas dans $D_{0,\sigma}(\rho)$ par le théorème 3.6. Cela montre que $\sigma' \in \mathcal{D}(\rho)$ par maximalité de $D_0(\rho)$ ([7, proposition 13.1]). Le deuxième énoncé est immédiat.

(ii) Supposons $F_0 \neq 0$. Il suffit de démontrer que l'image du morphisme naturel

$$W_{\sigma'} \hookrightarrow \mathrm{Ind}_I^K \Pi(M_\tau) \twoheadrightarrow \langle K \cdot M_\tau \rangle \hookrightarrow \pi$$

est isomorphe à σ', où $W_{\sigma'} \subset W$ est défini dans le lemme 2.18 (avec σ' étant vu comme sous-quotient de $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi')$). Si l'on note W_1 le noyau du morphisme

$$\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi_\sigma \oplus \chi_\tau) \to \pi,$$

alors le morphisme $W_{\sigma'} \to \pi$ se factorise à travers $W_{\sigma'}/(W_{\sigma'} \cap W_1)$. Puis, on vérifie à l'aide de l'exemple 2.20 que $W_{\sigma'}/(W_{\sigma'} \cap W_1)$ n'admet pas de poids de Diamond autre que σ' comme sous-quotient et que σ' apparaît dans $W_{\sigma'}$ avec multiplicité 1. Cela permet de conclure. □

Dans le lemme 4.6, il est clair que le poids σ' est uniquement déterminé par σ et j. Choisissons une représentation lisse admissible Ω de G telle que $\pi \hookrightarrow \Omega$ et telle que $\Omega|_K \cong \mathrm{Inj}_K \mathrm{soc}_K(\pi) = \oplus_{\sigma \in \mathcal{D}(\rho)} \mathrm{Inj}_K \sigma$. Le lemme 4.2 donne pour (M_τ, v_τ) :

(S1) $v_\tau \notin \Sigma(M_\tau)$, car $r^-(M_v) = 1$ et $M_v = \langle I \cdot v_\tau \rangle$ de telle sorte que $r^+(\langle I \cdot v_\tau \rangle) > r^+(\ker \beta)$;

(S2) il existe $f_{\sigma'} \in (\mathrm{Inj}_K \sigma')^{I_1} \subset \Omega^{I_1}$ un vecteur (unique à scalaire près) non nul propre de $\mathcal{H}$ de caractère $\chi'^s = \chi^s_{\sigma'}$.

On obtient alors par la construction du §4.1 une famille de représentations lisses admissibles de G : $\{\pi_{\phi,a},\ \phi \in \Phi, a \in \overline{\mathbb{F}}_p\}$.

Lemme 4.7. *Pour tout $\phi \in \Phi$ et $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$, on a $\pi_{\phi,a} \in S(\rho, r)$.*

Démonstration. Reprenons les notations du §4.1 concernant la construction de $\pi_{\phi,a}$. Par construction, $\pi_{\phi,a}$ est la sous-G-représentation de $\Omega_{\phi,a}$ engendrée par $M_\tau + \pi^{I_1}$. En particulier, on a $D_1(\rho) \hookrightarrow \pi_{\phi,a}$. D'après [7, lemme 19.7], on trouve que $D_0(\rho) \hookrightarrow \pi_{\phi,a}$ et que $\pi_{\phi,a}$ est engendrée par $D_1(\rho)$. D'ailleurs, il résulte de la construction que $\Pi_{\phi,a}(x) = \Pi(x)$ si $x \in D_1(\rho)$, d'où $D(\rho, r)$ s'injecte dans $(\pi_{\phi,a}|_{KZ}, \pi_{\phi,a}|_N, \mathrm{can})$ en tant que diagrammes. Cela permet de conclure. □

Le résultat suivant répond *négativement* à la question (Q2) (de l'introduction).

Théorème 4.8. *Dans le cas (I), il existe (au moins) deux éléments de $S(\rho, r)$ qui sont non isomorphes.*

Démonstration. Reprenons les notations du §4.1 concernant la construction de $\pi_{\phi,a}$ et choisissons une constante $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$ telle que

$$F_0 + a \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f_{\sigma'} \begin{cases} \neq 0 & \text{si } F_0 = 0 \\ = 0 & \text{si } F_0 \neq 0 \end{cases} \tag{13}$$

(a existe car $\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \left(\begin{smallmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) f_{\sigma'}$ n'est pas nul dans π). Il suffit de montrer que $\pi \ncong \pi_{\phi,a}$ en tant que G-représentations (avec $\phi \in \Phi$ quelconque). Par l'absurde, soit $\psi : \pi \xrightarrow{\sim} \pi_{\phi,a}$ un isomorphisme G-équivariante. Comme M_τ est contenu dans la K-représentation $I(\sigma, \tau)$ et comme

$$\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} \mathrm{Hom}_K(I(\sigma, \tau), \Omega) = 1,$$

on peut supposer $\psi_a|_{M_\tau} = \mathrm{Id}$. D'ailleurs, puisque $\phi(x) = 0$ pour tout $x \in \ker(\beta) + \Pi(\ker(\beta))$, on a $\Pi(x) = \Pi_{\phi,a}(x)$ (dans Ω). Or, par le lemme 4.6 (ii) et la construction (13), les deux K-représentations

$$\langle K \cdot \Pi(M_\tau) \rangle / \langle K \cdot \Pi(\ker(\beta)) \rangle$$

et

$$\langle K \cdot \Pi_{\phi,a}(M_\tau) \rangle / \langle K \cdot \Pi(\ker(\beta)) \rangle$$

n'admettent pas à la fois σ' comme sous-quotient. Cela donne une contradiction parce que

$$\psi(\langle K \cdot \Pi(M_\tau) \rangle) = \langle K \cdot \Pi_{\phi,a}(M_\tau) \rangle$$

par la G-équivariance de ψ. □

Supposons maintenant que l'on est dans le cas (II). D'après le théorème 3.6 (iii), on a une décomposition de diagrammes

$$D(\rho, r) = \bigoplus_{\ell=0}^{f} (D_{0,\ell}(\rho), D_{1,\ell}(\rho), r_\ell)$$

où $D_{i,\ell}(\rho) := \oplus_{\ell(\sigma)=\ell} D_{i,\sigma}(\rho)$ pour $i \in \{0, 1\}$. Par [7, théorème 19.9], on peut supposer que π est une somme directe de sous-représentations π_ℓ pour $\ell \in \{0, \cdots, f\}$ vérifiant

(a) $\mathrm{soc}_K\pi_\ell = \bigoplus_{\substack{\sigma''\in\mathscr{D}(\rho)\\ \ell(\sigma'')=\ell}} \sigma''$ où $\ell(\sigma'')$ est défini par (10) ;

(b) $(D_{0,\ell}(\rho), D_{1,\ell}(\rho), r_\ell) \hookrightarrow (\pi_\ell^{K_1}, \pi_\ell^{I_1}, \mathrm{can})$;

(c) π_ℓ est engendrée par $D_{1,\ell}(\rho)$ en tant que G-représentation.

Remarque 4.9. *Sous ces conditions précédentes sur π, on a $F_0 = 0$ dans le lemme 4.6 puisque $F_0 \in \pi_{\ell(\sigma)}$ et $\ell(\sigma') \neq \ell(\sigma)$.*

Le théorème suivant va répondre *négativement* à la question (Q3).

Théorème 4.10. *Il existe une représentation lisse admissible π' de G vérifiant les propriétés suivantes :*

(a') $\mathrm{soc}_K\pi' = \bigoplus_{\sigma''\in\mathscr{D}(\rho)} \sigma''$ *;*

(b') $(D_0(\rho), D_1(\rho), r) \hookrightarrow (\pi'^{K_1}, \pi'^{I_1}, \mathrm{can})$ *;*

(c') π' est engendrée par $D_1(\rho)$ en tant que G-représentation ;

(d') π' n'est pas semi-simple, en particulier, π' n'est pas une somme directe $\pi' = \oplus_{\ell=0}^{f}\pi'_\ell$ avec π'_ℓ des sous-représentations vérifiant (a)-(c) ci-dessus.

Démonstration. On va construire π' à partir de π en modifiant la construction du §4.1. Soit $\Omega|_K = \oplus_{\ell=0}^{f}\Omega_\ell$ une décomposition de Ω (en tant que K-représentation) telle que Ω_ℓ est isomorphe à $\mathrm{Inj}_K\mathrm{soc}_K(\pi_\ell)$ et telle que l'injection $\pi \hookrightarrow \Omega$ que l'on a fixé induit $\pi_\ell \hookrightarrow \Omega_\ell$ pour tout $\ell \in \{0, \cdots, f\}$. Comme $M_\tau, \Pi(M_\tau) \subset \pi_{\ell(\sigma)} \subset \Omega_{\ell(\sigma)}$, il existe une sous-$I$-représentation E de Ω contenant

$$\bigoplus_{\ell\neq\ell(\sigma)} \Omega_\ell + \Sigma(M_\tau),$$

mais pas v_τ. Soit $V_{\chi'}$ une sous-I-représentation de $\mathrm{Inj}_K\sigma' \subset \Omega_{\ell(\sigma')}$ isomorphe à $\mathrm{Inj}_I\chi'$ telle que $V_{\chi'}^{I_1} = \overline{\mathbb{F}}_p\Pi(f_{\sigma'})$. Alors, en choisissant

– d'une part, un endomorphisme I-équivariant $\phi : \Omega \to \Omega$ qui se factorise par

$$\Omega \to \Omega/E \to V_{\chi'} \to \Omega,$$

– d'autre part, une constante $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$ non nulle,

on obtient une action de $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ p & 0\end{smallmatrix}\right)$ sur Ω en définissant $\Pi_{\phi,a} : \Omega \to \Omega$ comme dans (11). On en déduit une représentation lisse admissible $\Omega_{\phi,a}$ de G. Enfin, on définit $\pi_{\phi,a}$ comme la sous-G-représentation de $\Omega_{\phi,a}$ engendrée par $D_1(\rho)$.

Montrons que la représentation $\pi' := \pi_{\phi,a}$ satisfait aux conditions demandées. Par construction, π' vérifie (a'), (b'), (c'). Pour vérifier la condition (d'), il suffit de montrer que π' ne possède pas de sous-G-représentation qui a pour K-socle $\oplus_{\ell(\sigma'')=\ell(\sigma)}\sigma''$. Supposons par l'absurde $\pi'_{\ell(\sigma)}$ une telle sous-représentation. Comme l'on a vu dans la remarque 4.9, on a

$$F_0 = \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \Pi(v_\tau) = 0$$

dans Ω. D'autre part, comme $\Pi_{\phi,a}(v_\tau) = \Pi(v_\tau) + af_{\sigma'}$ et $a \neq 0$, on voit que

$$F_0' := \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \Pi_{\phi,a}(v_\tau) \neq 0$$

et que F'_0 engendre σ' sous l'action de K. Autrement dit, $\pi'_{\ell(\sigma)}$ admet σ' dans son K-socle, ce qui donne une contradiction et permet de conclure. $\square$

4.3. Le cas $f = 2$ et ρ irréductible

Supposons maintenant que $f = 2$ et fixons ρ une représentation continue (irréductible) $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ telle que

$$\rho|_{I(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)} \cong \begin{pmatrix} \omega_4^{r_0+1+p(r_1+1)} & 0 \\ 0 & \omega_4^{p^2(r_0+1)+p^3(r_1+1)} \end{pmatrix}$$

avec $1 \leq r_0 \leq p-2$, $0 \leq r_1 \leq p-3$. Alors l'ensemble des poids de Diamond est donné par :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &:= (r_0, r_1) \\ \sigma_2 &:= (r_0 - 1, p-2-r_1) \otimes \det{}^{p(r_1+1)} \\ \sigma_3 &:= (p-1-r_0, p-3-r_1) \otimes \det{}^{r_0+p(r_1+1)} \\ \sigma_4 &:= (p-2-r_0, r_1+1) \otimes \det{}^{r_0+p(p-1)}, \end{aligned}$$

et la représentation $D_0(\rho)$ est (à torsion près)

$$\begin{array}{rclcccl} D_{0,\sigma_1}(\rho) & := & \sigma_1 & — & S_1 & — & (p-3-r_0, p-1-r_1) \\ & & & & \oplus & & \\ D_{0,\sigma_2}(\rho) & := & \sigma_2 & — & S_2 & — & (p-r_0, r_1-1) \\ & & & & \oplus & & \\ D_{0,\sigma_3}(\rho) & := & \sigma_3 & — & S_3 & — & (r_0-2, r_1+2) \\ & & & & \oplus & & \\ D_{0,\sigma_4}(\rho) & := & \sigma_4 & — & S_4 & — & (r_0+1, p-4-r_1) \end{array}$$

où

$$\begin{aligned} S_1 &:= (p-2-r_0, r_1-1) \oplus (r_0+1, p-2-r_1) \\ S_2 &:= (r_0-2, r_1) \oplus (p-1-r_0, p-1-r_1) \\ S_3 &:= (r_0-1, p-4-r_1) \oplus (p-r_0, r_1+1) \\ S_4 &:= (p-3-r_0, p-3-r_1) \oplus (r_0, r_1+2). \end{aligned}$$

On vérifie que $\delta(\sigma_i) = \sigma_{i+1}$ (avec la convention $\sigma_5 := \sigma_1$), i.e. $\sigma_i^{[s]}$ apparaît dans $D_{0,\sigma_{i+1}}(\rho)$ comme sous-quotient.

Notons $\chi_i := \chi_{\sigma_i}$ et $\chi_i^s := \chi_{\sigma_i}^s$, et choisissons une base $\{e_i, e_i^{[s]}, 1 \leq i \leq 4\}$ de $D_1(\rho) := D_0(\rho)^{I_1}$, où e_i (resp. $e_i^{[s]}$) est un vecteur propre de $\mathcal{H}$ de caractère χ_i (resp. χ_i^s).

Fixons $D(\rho, r)$ un diagramme associé à ρ. Dans cette section, on va démontrer que l'ensemble $S(\rho, r)$ contient un élément dont l'espace des K_1-invariants est *strictement* plus grand que $D_0(\rho)$. On fixe $\pi \in S(\rho, r)$ une représentation (supersingulière d'après [7, théorème 19.10]) de G.

4.3.1. La représentation V_1

Puisque $D_{0,\sigma_2}(\rho)$ contient une sous-K-représentation isomorphe à l'extension

$$0 \to \sigma_2 \to * \to \sigma_1^{[s]} \to 0$$

de type $(+1,1)$, le lemme 2.17 montre qu'il contient une sous-I-représentation M_1 isomorphe à $E_0(\chi_2,\chi_1^s,r_0)$. Posons

$$W_1 := \mathrm{Ind}_I^K \Pi(M_1) \cong \mathrm{Ind}_I^K \Pi(E_0(\chi_2,\chi_1^s,r_0)).$$

Puisque le caractère $\chi_1^s\alpha^{-p}$ n'est autre que χ_3 et puisque $\mathrm{Ind}_I^K\Pi(\chi_3)$ admet un sous-quotient isomorphe à σ_4, la sous-représentation $W_{1,\sigma_4} \subset W_1$ est bien définie (cf. lemme 2.18). On note V_1 l'image de W_{1,σ_4} dans π. Le lemme suivant décrit la filtration par le K-socle de V_1.

Lemme 4.11. *(i) On a* $\mathrm{soc}_K V_1 = \sigma_1 \oplus \sigma_3$.
(ii) La filtration par le K*-socle de* V_1 *est la suivante (où l'on pose* $\tau_0 := \sigma_3$ *et* $\tau_1 := \sigma_2^{[s]}$*) :*

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} \tau_0 & — & \tau_1 & — & \cdots & — & \tau_{r_0-1} & — & \tau_{r_0} & — & \tau_{r_0-1} & — & \cdots & — & \tau_0 & — & \sigma_4 \\ &&&&&&&&&&&&&&&& | \\ &&&&&&&&&&&&&&&& \sigma_1. \end{array}$$

De manière explicite, $(V_1/\sigma_1)_i = \begin{cases} \tau_i & \text{si } i \leq r_0 \\ \tau_{2r_0-i} & \text{si } r_0+1 \leq i \leq 2r_0 \\ \sigma_4 & \text{si } i = 2r_0+1. \end{cases}$

(iii) $\tau_i \notin \mathcal{D}(\rho)$ *pout tout* $i \neq 0$ *; le couple* (σ_1,σ_4) *est de type* $(+1,1)$ *et* (τ_i,τ_{i+1}) *de type* $(+1,0)$ *pour tout* $0 \leq i \leq r_0-1$.

Démonstration. C'est une conséquence du corollaire 2.19 (analogue à l'exemple 2.20). D'abord, on constate que l'image de $\mathrm{Ind}_I^K\Pi(\chi_2)$ dans π est $I(\sigma_3,\sigma_2^{[s]})$ et celle de $\mathrm{Ind}_I^K\Pi(\chi_1^s)$ est σ_1. Puis, en prenant $j=0$ dans l'exemple 2.20, on vérifie qu'aucun des poids $\sigma_{\emptyset}^{(i)}$ et $\sigma_{\{0\}}^{(i)}$ pour $1 \leq i \leq t$ n'appartient à $\mathcal{D}(\rho)$. Le résultat s'en déduit en rappelant que seul les poids de Diamond peuvent apparaître comme sous-K-représentation de π. □

Par (8) de la preuve du lemme 2.18, V_1 est engendrée par le vecteur

$$F_{p(p-2-r_1)} = \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} \lambda^{p(p-2-r_1)} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi(v_1)$$

où v_1 est un vecteur non nul propre de $\mathcal{H}$ de caractère χ_3. On note $S_1 \subset V_1$ la sous-K-représentation engendrée par le vecteur

$$F_0 = \sum \lambda \in \mathbb{F}_q \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi(v_1).$$

Alors, encore par (8), S_1 n'est autre que W_{σ_3} en regardant σ_3 comme un sous-quotient de $\mathrm{Ind}_I^K\Pi(\chi_3)$. Par le corollaire 2.19 et le lemme 4.11, on trouve la filtration par le socle de S_1 :

$$\tau_0 — \tau_1 — \cdots — \tau_{r_0} — \cdots — \tau_1 — \tau_0. \tag{14}$$

4.3.2. La représentation V_2

On va construire un autre sous-espace vectoriel V_2 de π qui est K-stable et qui possède la même filtration par le socle que V_1.

Lemme 4.12. *Il existe une unique sous-*K*-représentation de* π *qui est isomorphe à*

$$\sigma_4 \quad — \quad \sigma_3^{[s]} \quad — \quad \omega := (p-2-r_0, r_1+3) \otimes \det{}^{r_0+p(p-2)}.$$

Démonstration. On vérifie que σ_3 contient une sous-I-représentation isomorphe à $E_0(\chi_3)$ (grâce à l'hypothèse $r_0 \le p-2$) et que $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi_3\alpha^{-1})$ admet le poids ω comme sous-quotient. Soit W_ω la sous-K-représentation de $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(E_0(\chi_3))$ définie dans la proposition 2.7. Le lemme 2.12 implique que W_ω contient entièrement $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi_3)$. D'autre part, par construction de $D_0(\rho)$, on sait que l'image de $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi_3)$ dans π est isomorphe à $I(\sigma_4, \sigma_3^{[s]}) \subset D_{0,\sigma_4}(\rho)$. Comme le socle de $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi_3\alpha^{-1})$ qui apparaît aussi dans W_ω n'est pas un poids de Diamond, on trouve que l'image de W_ω dans π vérifie la condition demandée. L'unicité se déduit de la proposition 2.21 (ii) et du fait que $\sigma_3^{[s]}, \omega \notin \mathcal{D}(\rho)$. □

On note $\overline{W_\omega}$ la K-représentation construite dans le lemme 4.12. Choisissons une base $\{v, w\}$ pour $E_0(\chi_3)$ et définissons des vecteurs f_k, F_k ($0 \le k \le q-1$) dans $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(E_0(\chi_3))$ comme dans (4). Alors, vu comme sous-quotient de $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(E_0(\chi_3))$, $\overline{W_\omega}$ admet une base induite ([7, lemme 2.7])

$$\left\{ \begin{array}{ll} \overline{f}_{d_0+pd_1}, & p-2-r_1 \le d_1 \le p-1, \text{ ou } d_1 = p-3-r_1 \text{ et } p-1-r_0 \le d_0 \le p-1 \\ \overline{F}_{d_0'+pd_1'}, & 0 \le d_0' \le p-2-r_0 \text{ et } p-4-r_1 \le d_1' \le p-1 \end{array} \right\}$$

où $\overline{f}_k$ (resp. $\overline{F}_k$) désigne l'image de f_k (resp. F_k) dans $\overline{W_\omega} \subset \pi$. On constate que $\overline{f}_{p(p-2-r_1)}$ et $\overline{f}_{(p-1-r_0)+p(p-3-r_1)}$ engendrent l'espace des I_1-invariants de $\overline{W_\omega}$: en fait, on a $\overline{f}_{p(p-2-r_1)} \in \overline{\mathbb{F}}_p e_4$ et $\overline{f}_{(p-1-r_0)+p(p-3-r_1)} \in \overline{\mathbb{F}}_p e_3^{[s]}$. Notons que le vecteur $\overline{F}_{p(p-4-r_1)}$ est fixé par $\left(\begin{smallmatrix} 1+\mathfrak{p} & \mathcal{O}_F \\ \mathfrak{p}^2 & 1+\mathfrak{p} \end{smallmatrix}\right)$ mais pas fixé par I_1 : on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix} \overline{F}_{p(p-4-r_1)} = \overline{F}_{p(p-4-r_1)} - \overline{f}_{p(p-2-r_1)} \tag{15}$$

par le lemme 2.5 (iii).

Le vecteur $v_\omega := \overline{F}_{p(p-3-r_1)} \in \overline{W_\omega}$ est un vecteur propre de $\mathcal{H}$ de caractère $\chi_\omega\alpha^{-p} = \chi_4$ (par le lemme 2.5 (i)). Posons $M_2 \subset \pi$ la I-représentation engendrée par v_ω. Explicitement, M_2 admet une base formée par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \overline{f}_{d_0+pd_1}, & d_1 = p-3-r_1 \text{ et } p-1-r_0 \le d_0 \le p-1 \\ \overline{f}_{p(p-2-r_1)}, \ \overline{f}_{p(p-1-r_1)}, \ \overline{F}_{p(p-4-r_1)}, \ \overline{F}_{p(p-3-r_1)} & \end{array} \right\}. \tag{16}$$

Pour définir l'espace V_2, nous avons besoin de connaître la structure de M_2.

Définissons d'abord un sous-espace vectoriel M_2' de M_2 par $M_2' := \overline{\mathbb{F}}_p e_4 \oplus \overline{\mathbb{F}}_p e_\omega \subset M_2$, où l'on écrit $e_\omega := \overline{F}_{p(p-4-r_1)}$ pour simplifier (cette notation vient du fait que son image dans ω engendre ω^{I_1}). Vu l'équation (15), M_2' est stable par I et isomorphe à $\Pi(E_1(\chi_4^s))$, i.e. à l'extension

$$0 \to \chi_4 \to * \to \chi_4\alpha^p \to 0.$$

Lemme 4.13. *La sous-K-représentation $\langle K \cdot \Pi(M_2')\rangle \subset \pi$ est isomorphe à $I(\sigma_1, \sigma_4^{[s]})$.*

Démonstration. En voyant $\langle K \cdot \Pi(M_2')\rangle$ comme l'image du morphisme $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(M_2') \to \pi$, il s'agit de déterminer le noyau $\mathcal{K}$ de ce morphisme. Par la preuve du [7, lemme 19.5], la sous-K-représentation de π engendrée par $\Pi(e_4)$ est isomorphe à $I(\sigma_1, \sigma_4^{[s]})$. Donc, si l'on note $\mathcal{K}_1$ le noyau du quotient

$$\mathrm{Ind}_I^K \overline{\mathbb{F}}_p \Pi(e_4) \twoheadrightarrow I(\sigma_1, \sigma_4^{[s]}),$$

alors $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}$ et on obtient une injection $I(\sigma_1, \sigma_4^{[s]}) \hookrightarrow \mathrm{Ind}_I^K \Pi(M_2')/\mathcal{K}_1$. D'autre part, on peut vérifier que $I(\sigma_1, \sigma_4^{[s]})$ contient une sous-I-représentation isomorphe à $E_1(\chi_4^s)$, donc il existe par réciprocité de Frobenius une surjection K-équivariante $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(M_2') \cong \mathrm{Ind}_I^K E_1(\chi_4^s) \twoheadrightarrow I(\sigma_1, \sigma_4^{[s]})$ qui envoie forcément $\mathcal{K}_1$ vers 0 par ce qui précède. On en déduit une décomposition :

$$\mathrm{Ind}_I^K \Pi(M_2')/\mathcal{K}_1 \cong I(\sigma_1, \sigma_4^{[s]}) \oplus \mathrm{Ind}_I^K \overline{\mathbb{F}}_p \Pi(e_\omega).$$

Or, en utilisant le lemme 2.1, on vérifie facilement que $\mathrm{Ind}_I^K \overline{\mathbb{F}}_p \Pi(e_\omega)$ n'admet aucun poids de Diamond comme sous-quotient. Cela implique que $\mathrm{Ind}_I^K \overline{\mathbb{F}}_p \Pi(e_\omega) \subset \mathcal{K}$ puisque $\mathrm{soc}_K \pi = \oplus_{\sigma \in \mathcal{D}(\rho)} \sigma$ et le résultat s'en déduit. □

Ensuite, posons M_2'' la sous-I-représentation de M_2 engendrée par $\overline{f}_{p-1+p(p-3-r_1)}$. En utilisant la proposition 2.9 (i), M_2'' est le sous-espace vectoriel de M_2 de dimension $r_0 + 1$ engendré par (cf. (16)) :

$$\left\{ \overline{f}_{d_0 + p d_1}, \quad d_1 = p - 3 - r_1 \text{ et } p - 1 - r_0 \leq d_0 \leq p - 1 \right\}.$$

Autrement dit, M_2'' est isormorphe à $E_0(\chi_3^s, r_0)$.

Lemme 4.14. *La K-représentation $\langle K \cdot \Pi(M_2'') \rangle \subset \pi$ contient la représentation S_1.*

Démonstration. Posons $W_2'' := \mathrm{Ind}_I^K \Pi(M_2'')$. Puisque

$$\mathrm{cosoc}_I(M_2') = \chi_3^s \alpha^{-r_0} \cong \chi_4 \alpha = (p - r_0, r_1 + 1) \otimes \det^{(r_0 - 1) + p(p-1)}$$

et que $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi_4 \alpha)$ admet $\sigma_3 = \tau_0$ comme sous-quotient (avec $J(\sigma_3) = \{1\}$), la sous-représentation $W_{2,\sigma_3}'' \subset W_2''$ est définie. Le corollaire 2.19 (combiné avec l'exemple 2.20) montre que W_{2,σ_3}'' a la même filtration par le socle que S_1. De plus, par un calcul compliqué mais direct, on trouve que W_{2,σ_3}'' est isomorphe à S_1 en tant que K-représentation. En effet, l'isomorphisme est induit par envoyant F_0 vers le vecteur

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{p(r_1+2)} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi(w_{\chi_4 \alpha})$$

avec $w_{\chi_4 \alpha} \in M_2''$ un vecteur non nul propre de $\mathcal{H}$ de caractère $\chi_4 \alpha$.

Après, on montre que W_{2,σ_3}'' coïncide avec S_1 en tant que *sous-espaces* vectoriels de π. En effet, cela résulte des faits que S_1 n'admet pas de poids de Diamond autre que σ_3 comme sous-quotient et que σ_3 apparaît dans $\mathrm{soc}_K(\pi)$ avec multiplicité 1. □

D'autre part, notons $\overline{M_2}$ le quotient de M_2 par M_2' de sorte que $\langle K \cdot \overline{M_2} \rangle$ s'injecte dans $\pi / I(\sigma_1, \sigma_4^{[s]})$. Explicitement, $\overline{M_2}$ est une extension de $\Pi(E_j(\chi_4^s \alpha^p))$ par M_2'' dont la filtration par le socle est :

$$\begin{array}{ccccccccc} \chi_3^s & \text{—} & \chi_3^s \alpha^{-1} & \text{—} & \cdots \quad \cdots & \text{—} & \chi_3^s \alpha^{-r_0} & \text{—} & \chi_3^s \alpha^{-(r_0+1)} = \chi_4 \\ & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & \chi_4 \alpha^{-p} \end{array} \tag{17}$$

où l'on utilise la notion $\chi_4 \alpha^{-p} \cdots \chi_4$ pour préciser que cette I-extension est triviale sur $\begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p} & \mathcal{O}_F \\ \mathfrak{p}^2 & 1+\mathfrak{p} \end{pmatrix}$.

Proposition 4.15. *La K-représentation $\langle K \cdot \Pi(M_2) \rangle \subset \pi$ contient une sous-K-représentation V_2 qui contient S_1 et qui a même filtration par le socle que V_1.*

Démonstration. Rappelons que v_ω est le vecteur engendrant M_2. Posons

$$R_0 = \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi(v_\omega) \in \langle K \cdot \Pi(M_2)\rangle.$$

Vu la structure de $\overline{M_2}$ (17), le lemme 2.10 (i) montre que l'image de R_0 dans $\mathrm{Ind}_I^K E_j(\chi_4^s\alpha^p)$ est fixée par I_1 et engendre une K-représentation isomorphe à σ_4. Puis, on applique le corollaire 2.19 pour déduire que l'image de $S_2 := \langle K \cdot R_0\rangle$ dans $\mathrm{Ind}_I^K \overline{M_2}$ contient une extension de σ_4 par S_1 (cf. le lemme 4.14 et (17)), i.e.

$$\tau_0 — \tau_1 — \cdots — \tau_{r_0} — \cdots — \tau_1 — \tau_0 — \sigma_4.$$

Combiné avec le lemme 4.13, on voit que $\langle K \cdot \Pi(M_2)\rangle$ contient une K-extension S de la forme :

$$0 \to I(\sigma_1, \sigma_4^{[s]}) \to S \to S_2 \to 0$$

qui provient effectivement d'un certain élément dans $\mathrm{Ext}_K^1(\sigma_4, I(\sigma_1, \sigma_4^{[s]}))$. Par ailleurs, en utilisant le lemme 4.11, on vérifie que σ_4 apparaît dans S avec multiplicité 1. Par conséquent, il existe une unique sous-representation $U(\sigma_4) \subset S$ admettant σ_4 comme cosocle. Comme $\mathrm{Ext}_K^1(\sigma_4, \sigma_4^{[s]}) = 0$, on voit que $\sigma_4^{[s]}$ n'apparaît pas dans $U(\sigma_4)$ et pour conclure il suffit de poser $V_2 = U(\sigma_4) + \sigma_1$. □

4.3.3. Conclusion

Rappelons que l'on a défini deux sous-espaces M_1 et M_2 de π. Choisissons une représentation lisse admissible Ω de G telle que $\pi \hookrightarrow \Omega$ et telle que $\Omega|_K \cong \oplus_{\sigma\in\mathscr{D}(\rho)}\mathrm{Inj}_K\sigma$ et posons $M = M_1+M_2$. Rappelons que $v_1 \in M_1$ est un vecteur propre de $\mathcal{H}$ de caractère χ_3 engendrant M_1. On a les faits suivants sur (M, v_1) :

(S1) $v_1 \notin \Sigma(M)$. En effet, la longueur de Loewy de M_1 (resp. M_2) en tant que U^+-représentation est égale à $r_0 + 1$ par la remarque 2.16 (resp. $r_0 + 2$) et la longueur de Loewy de M_2 en tant que U^--représentation est égale à 2. Donc, si l'on a par absurde $v_1 \in \Sigma(M)$, alors le caractère χ_3 devrait apparaître dans $M_2/\mathrm{soc}_I^{r_0}(M_2)$ qui est isomorphe à $\chi_4 \oplus \chi_3^s\alpha^{-r_0}$, d'où une contradiction.

(S2) Il existe $f_{\sigma_3} \in (\mathrm{Inj}_K\sigma_3)^{I_1}$ un vecteur non nul propre de $\mathcal{H}$ de caractère χ_3^s : c'est clair par le lemme 4.2.

On obtient alors par la construction du §4.1 une famille de représentations lisse admissibles de G, $\{\pi_{\phi,a},\ \phi \in \Phi, a \in \overline{\mathbb{F}}_p\}$.

Lemme 4.16. *Pour tout $\phi \in \Phi$ et $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$, on a $\pi_{\phi,a} \in S(\rho, r)$.*

Démonstration. En examinant la preuve du lemme 4.7, on trouve qu'il suffit de démontrer que M_2 s'injecte dans $\pi_{\phi,a}$, ou encore la K-représentation $\overline{W_\omega}$ définie dans le lemme 4.12 est contenue dans $\pi_{\phi,a}$. Or, en reprenant les notations de ce lemme, cela résulte du fait que tout quotient de $\mathrm{Ind}_I^K E_0(\chi_3)$ dans π contient $\overline{W_\omega}$ comme sous-représentation (comparer avec [7, lemme 19.5]). □

Le théorème suivant va répondre *négativement* à la question (Q2).

Théorème 4.17. *Il existe un élément π' de $S(\rho, r)$ telle que $\pi'^{K_1} \supsetneq D_0(\rho)$.*

Démonstration. Supposons que la représentation π que l'on a fixé soit telle que $\pi^{K_1} = D_0(\rho)$. On va construire un autre élément de $S(\rho, r)$ vérifiant la condition demandée.

Comme V_1 (et de même pour V_2) n'admet pas de poids de Diamond autre que σ_3 et σ_4 et comme $\mathrm{Ext}^1_K(\sigma_4, \tau) = 0$ pour tout sous-quotient irréductible de S_1 autre que σ_3, la condition $\pi^{K_1} = D_0(\rho)$ implique que $V_1 = V_2$ en tant que sous-espaces de π car sinon π contiendrait une extension non triviale de la forme

$$0 \to \sigma_3 \oplus \sigma_1 \to * \to \sigma_4 \to 0,$$

ce qui est impossible parce que une telle extension est triviale sur K_1 et $D_0(\rho)$ n'en contient pas.

Par définition de $\Pi_{\phi,a}$, on a $\Pi_{\phi,a}(v_1) = \Pi(v_1) + af_{\sigma_3}$ et $\Pi_{\phi,a}(x) = \Pi(x)$ pour $x \in M_2$, donc $\pi_{\phi,a}$ contient à la fois les vecteurs $F_{p(p-2-r_1)}$ (provenant de V_2 !) et $F_{p(p-2-r_1)} + af_{p(p-2-r_1)}$ où

$$f_{p(p-2-r_1)} = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{p(p-2-r_1)} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f_{\sigma_3}.$$

Cela montre que, dès que $a \neq 0$, $\pi_{\phi,a}$ contient l'extension $0 \to \sigma_3 \to * \to \sigma_4 \to 0$ (engendrée par $f_{p(p-2-r_1)}$) et il suffit de poser $\pi' = \pi_{\phi,a}$ avec $a \neq 0$ pour conclure. □

Références

[1] J.L. Alperin, *Local representation theory*, Cambridge studies in advanced mathematics 11, 1986.

[2] H. Andresen & J. Jorhensen & P. Landrock, *The projective indecomposable modules of* $\mathrm{SL}(2, p^n)$, Proc. London Math. Soc. 46 (1983), 38-52.

[3] L. Barthel & R. Livné, *Modular representations of* GL_2 *of a local field : unramified case*, J. of Number Theory 55 (1995), 1-27.

[4] L. Barthel & R. Livné, *Irreducible modular representations of* GL_2 *of a local field*, Duke Math. J. 75 (1994), 261-292.

[5] C. Breuil, *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *:I*, Compositio Math. 138 (2003), 165-188.

[6] C. Breuil, *Representations of Galois and of* GL_2 *in characteristic p*, Cours à l'Université Columbia, 2007.

[7] C. Breuil & V. Paškūnas, *Towards a modulo p Langlands correspondence for* GL_2, 2007, à paraître à Memoirs of Amer. Math. Soc.

[8] K. Buzzard, F. Diamond & F. Jarvis, *On Serre's conjecture for mod ℓ Galois representations over totally real fields*, prépublication, 2005.

[9] F. Diamond, *A correspondence between representations of local Galois groups and Lie-type groups*, dans *L*-functions and Galois representations (Durham 2004), 2005.

[10] T. Gee, *On the weights of mod p Hilbert modular forms*, prépublication, 2005.

[11] A.V. Jeyakumar, *Principal indecomposable representations for the group* $\mathrm{SL}(2, q)$, J. Algebra 30 (1974), 444-458.

[12] V. Paškūnas, *Extensions for supersingular representations of* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Astérisque 331 (2010), 317-353.

[13] V. Paškūnas, *On the restriction of representations of* $\mathrm{GL}_2(F)$ *to a Borel subgroup*, Compositio Math. 143 (2007), 1533-1544.

[14] J.-P. Serre, *Corps locaux*, 3[ième] édition, Hermann, 1968.

[15] J.-P. Serre, *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Invent. Math. 15 (1972), 259-331.

[16] J.-P. Serre, *Sur les représentations modulaires de degré 2 de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Duke Math. J. 54 (1987), 179-230.