Normes invariantes et existence de filtrations admissibles

Yongquan Hu

24/03/2009

Résumé – Dans [3], est formulée une conjecture sur l'équivalence entre l'existence de normes invariantes sur certaines représentations localement algébriques de $\mathrm{GL}_{d+1}(L)$ et l'existence de certaines représentations de de Rham de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$, où L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Dans cet article, on montre le sens "facile" de cette conjecture : l'existence de normes invariantes entraîne l'existence de filtrations admissibles.

Abstract – In [3], is formulated a conjecture on the equivalence of the existence of invariant norms on certain locally algebraic representations of $\mathrm{GL}_{d+1}(L)$ and the existence of certain de Rham representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$, where L is a finite extension of $\mathbb{Q}_p$. In this paper, we prove the "easy" direction of the conjecture: the existence of invariant norms implies the existence of admissible filtrations.

Table des matières

Mathematics Subject Classification (1991) : 05A20, 17B10, 22E50

1 Introduction

L'objet de cet article est une conjecture proposée dans [3]. Pour l'énoncer, on fixe d'abord quelques notations. Soit p un nombre premier. On fixe deux extensions finies L et K de $\mathbb{Q}_p$ contenues dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ telles que $[L:\mathbb{Q}_p] = |\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L,K)|$, où $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L.K)$ désigne l'ensemble des plongements $\mathbb{Q}_p$-linéaires de L dans K, et aussi une extension finie galoisienne L' de L telle que $[L'_0:\mathbb{Q}_p] = |\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L'_0,K)|$ où L'_0 désigne le sous-corps non-ramifié maximal de L'. On note $W(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$ (resp. $W(\overline{\mathbb{Q}}_p/L')$) le groupe de Weil de L (resp. L').

On considère les deux catégories suivantes (cf. §2.2) :

(i) $\mathrm{WD}_{L'/L}$: la catégorie des K-représentations (r,N,V) de dimension finie du groupe de Weil-Deligne de L telles que la restriction de r à $W(\overline{\mathbb{Q}}_p/L')$ est non-ramifiée ;

(ii) $\mathrm{MOD}_{L'/L}$: la catégorie des (φ,N)-modules étales D sur $L'_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}K$ munis d'une action de $\mathrm{Gal}(L'/L)$ vérifiant quelques conditions usuelles.

On sait qu'il existe deux foncteurs (non canoniques)

$$\mathrm{WD}:\mathrm{MOD}_{L'/L}\to\mathrm{WD}_{L'/L},\quad \mathrm{MOD}:\mathrm{WD}_{L'/L}\to\mathrm{MOD}_{L'/L}$$

qui sont inverses l'un de l'autre (cf. §2.2).

Rappelons que (cf. [11]) pour un objet $(\varphi,N,\mathrm{Gal}(L'/L),D)$ de $\mathrm{MOD}_{L'/L}$ on peut définir un entier $t_N(D)$ et, si de plus on se donne d'une filtration décroissante exhaustive séparée sur $D_{L'} = L'\otimes_{L'_0}D$ qui est stable sous l'action de $\mathrm{Gal}(L'/L)$, on a un autre entier $t_H(D_{L'})$. Par définition cette filtration est dite *admissible* si $t_H(D_{L'}) = t_N(D)$ et si $t_H(D'_{L'})\le t_N(D')$ pour tout sous-objet D' de D où D' est muni de la filtration induite. Pour tout plongement $\sigma : L\hookrightarrow K$, on pose

$$D_{L',\sigma} = D_{L'}\otimes_{L'\otimes_{\mathbb{Q}_p}K}(L'\otimes_{L,\sigma}K).$$

On a un isomorphisme naturel $D_{L'}\simeq\prod_{\sigma:L\hookrightarrow K}D_{L',\sigma}$.

Si $(r,N,V)\in\mathrm{WD}_{L'/L}$, on note $(r,N,V)^{\mathrm{ss}}\in\mathrm{WD}_{L'/L}$ sa F-semisimplification (cf. [7], §8.5).

On fixe un entier $d\ge 1$ et :

(i) un objet (r,N,V) de $\mathrm{WD}_{L'/L}$ de dimension $d+1$ tel que r est semi-simple ;

(ii) pour tout $\sigma : L\hookrightarrow K$, un ensemble de $d+1$ entiers $i_{1,\sigma}<\cdots<i_{d+1,\sigma}$.

Posons $a_{j,\sigma} = -i_{d+2-j,\sigma}-(j-1)$ pour tout $\sigma : L\hookrightarrow K$ et $j\in\{1,\dots,d+1\}$. D'une part, à (r,N,V) on associe une représentation lisse π sur K de $\mathrm{GL}_{d+1}(L)$ par la correspondance de Langlands locale modifiée. D'autre part, à $\{a_{j,\sigma}\}_{j,\sigma}$ on associe une représentation $\mathbb{Q}_p$-rationnelle sur K de $\mathrm{GL}_{d+1}(L)$, notée ρ.

Conjecture 1.1. ([3], Conjecture 4.3) Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\rho\otimes_K\pi$ admet une norme invariante ;

(ii) Il existe un objet $(\varphi,N,\mathrm{Gal}(L'/L),D)$ dans $\mathrm{MOD}_{L'/L}$ tel que :

$$WD(\varphi,N,\mathrm{Gal}(L'/L),D)^{\mathrm{ss}} = (r,N,V),$$

et une filtration admissible $(\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma})_{i,\sigma}$ stable par $\mathrm{Gal}(L'/L)$ sur $D_{L'}$ telle que pour tout $\sigma : L \hookrightarrow K$:

$$\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma}/\mathrm{Fil}^{i+1} D_{L',\sigma} \neq 0 \Leftrightarrow i \in \{i_{1,\sigma}, \ldots, i_{d+1,\sigma}\}.$$

On renvoie le lecteur à [3], §1 pour l'introduction de la conjecture. Certains résultats concernant cette conjecture sont connus :

- si (r, N, V) est absolument irréductible (alors $N = 0$), la conjecture est vraie ([3], Theorem 5.2) ;
- si (r, N, V) est absolument indécomposable, alors la condition (ii) est vraie si et seulement si le caractère central de $\rho \otimes_K \pi$ est unitaire ; en particulier, on a (i) entraîne (ii) ([3], Proposition 5.3) ;
- si (r, N, V) est tel que $N = 0$ et r est non-ramifiée et scindée sur K, alors (i) entraîne (ii) ([3], Theorem 5.6) ;
- si $d = 1$, $L = L' = \mathbb{Q}_p$, et r n'est pas scalaire, la conjecture est vraie ([1], [6]).

Dans cet article, nous montrons le théorème suivant :

Théorème 1.2. *Supposons K galoisienne sur $\mathbb{Q}_p$ et suffisamment grosse telle que l'on a*

$$(r, N, V) = \bigoplus_{i=1}^{s} (r_i, N_i, V_i)$$

avec les (r_i, N_i, V_i) absolument indécomposables de dimension d_i. On considère les quatre conditions suivantes :

(i) $\rho \otimes_K \pi$ admet une norme invariante.

(ii) Il existe un objet $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)$ dans $\mathrm{MOD}_{L'/L}$ tel que :

$$WD(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)^{\mathrm{ss}} = (r, N, V),$$

et une filtration admissible $(\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma})_{i,\sigma}$ stable par $\mathrm{Gal}(L'/L) \times \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}_p)$ sur $D_{L'}$ telle que

$$\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma}/\mathrm{Fil}^{i+1} D_{L',\sigma} \neq 0 \Leftrightarrow i \in \{i_{1,\sigma}, \ldots, i_{d+1,\sigma}\}.$$

(iii) Posons $(\varphi_i, N_i, \mathrm{Gal}(L'/L), D_i) = \mathrm{MOD}(r_i, N_i, V_i)$. Pour un ordre convenable des D_i (voir §2.4), les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$[K : L] \sum_{j=1}^{d_1} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma} \leq t_N(D_1),$$

$$\vdots$$

$$[K : L] \sum_{j=1}^{d_1+\cdots+d_{s-1}} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma} \leq \sum_{i=1}^{s-1} t_N(D_i),$$

$$[K : L] \sum_{j=1}^{d+1} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma} = \sum_{i=1}^{s} t_N(D_i) = t_N(D).$$

*(iv) Le caractère central de $\rho \otimes_K \pi$ est unitaire et la condition d'Emerton est satisfaite (voir §**??**).*

Alors, on a les implications et équivalences :

$$(i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv).$$

Remarque 1.3. L'existence de l'ordre dans (iii) et l'équivalence entre (ii) et (iii) sont la réponse de [3], Remark 5.7.

Comme conséquence, on obtient (cf. corollaire 2.16)

Corollaire 1.4. *Avec les notations comme dans la conjecture 1.1, on a l'implication*

$$(i) \Rightarrow (ii).$$

Voici le plan de l'article :

On commence par rappeler quelques constructions et notations dans [3] pour énoncer la conjecture précédente et le théorème principal (§2). Les autres chapitres sont consacrés à prouver notre théorème. Plus précisément, on prouve

$$(i) \Rightarrow (iv) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (ii).$$

L'implication $(i) \Rightarrow (iv)$ est en fait un lemme d'Emerton (cf. lemme 2.9) et $(ii) \Rightarrow (iii)$ se déduit de la définition d'admissibilité. Au §3, on montre $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ en exprimant la condition d'Emerton explicitement par la théorie de Bernstein-Zelevinsky.

Au §4, on montre $(iii) \Rightarrow (ii)$. Cette partie, bien que constituée d'algèbre (semi-)linéaire, est la plus technique de l'article. L'idée de la démonstration est comme suit. Après l'étude de quelques exemples, on définit d'abord l'objet $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)$ (essentiellement l'opérateur φ). On introduit au §4.2 un ensemble fini de sous-objets de D, noté S, et on munit $D_{L'}$ d'une filtration convenable (§4.3) telle que pour tout $E \in S$ on a

$$t_H(E_{L'}) = [K:L] \sum_{j=1}^{\mathrm{rg}E} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma}$$

où $\mathrm{rg}E = \mathrm{rg}_{L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K} E$, et par conséquent $t_H(E_{L'}) \leq t_N(E)$. On montre que cette filtration est déja *admissible*. Pour cela, soit D' un sous-objet quelconque de D, on lui associe une suite de sous-objets $E_i \in S$

$$0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_m \subsetneq E_{m+1} = D,$$

qui est la plus *proche* de D' au sens où si $E \in S$ est de même rang que E_i, alors

$$\mathrm{rg}_{L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K}(D' \cap E) \leq \mathrm{rg}_{L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K}(D' \cap E_i).$$

D'autre part, si on pose $c_i = \mathrm{rg}(D' \cap E_i) - \mathrm{rg}(D' \cap E_{i-1})$ (sur $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$) et

$$\Omega = \{j \in \mathbb{N} | \ \exists i \text{ tel que } \mathrm{rg}E_i - c_i + 1 \leq j \leq \mathrm{rg}E_i\},$$

alors on a $t_H(D'_{L'}) \leq [K:L] \sum_{j \in \Omega} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma}$. Enfin on compare $[K:L] \sum_{j \in \Omega} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma}$ et $t_N(D')$ en utilisant un lemme combinatoire, et on en déduit $t_H(D'_{L'}) \leq t_N(D')$ (cf. le corollaire 4.11).

2 Rappels et notations

2.1 Notations générales

Soit p un nombre premier. On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$, et aussi deux extensions finies L et K de $\mathbb{Q}_p$ contenues dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ telles que $[L:\mathbb{Q}_p] = |\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L,K)|$. On note $\operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$ le groupe de Galois de L et $W(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$ son groupe de Weil (qui est dense dans $\operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$), et $\mathrm{rec} : W(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} L^\times$ l'isomorphisme de réciprocité de telle sorte que les Frobenius arithmétiques s'envoient sur les inverses des uniformisantes. Posons $\mathcal{O}_L$ l'anneau des entiers de L, k_L le corps résiduel de L et $q = p^f = |k_L|$. On note $L_0 = \operatorname{Frac}(W(\mathbb{F}_q))$ le sous-corps non-ramifié maximal de L et φ_0 le Frobenius sur L_0. On note val_p la valuation p-adique sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ normalisée par $\mathrm{val}_p(p) = 1$ et on pose $|x|_p = p^{-\mathrm{val}_p(x)}$ si $x \in \overline{\mathbb{Q}}_p$; de même on pose $\mathrm{val}_L(x) = e\mathrm{val}_p(x)$ et $|x|_L = q^{-\mathrm{val}_L(x)}$, où $e = [L:\mathbb{Q}_p]/f$ est l'indice de ramification de L sur $\mathbb{Q}_p$.

Fixons L' une extension finie galoisienne de L. On définit L'_0, $k_{L'}$, f', φ'_0, $\mathrm{val}_{L'}$ comme ci-dessus. On suppose $[L'_0:\mathbb{Q}_p] = |\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L'_0,K)|$.

Si $\mathbb{G}$ est un groupe réductif défini sur $\mathbb{Q}_p$ et si $G = \mathbb{G}(L)$ est le groupe des L-points rationnels de $\mathbb{G}$, on note $\mathrm{Rep}G$ la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_p$-représentations lisses de G. Soit P un sous-groupe parabolique de G avec M son quotient de Levi et N son radical unipotent. On définit les foncteurs suivants :

$$\mathrm{ind}_P^G,\quad \mathrm{Ind}_P^G : \mathrm{Rep}M \to \mathrm{Rep}G,$$

$$r_P^G : \mathrm{Rep}G \to \mathrm{Rep}M.$$

(a) Soit $(\sigma, W) \in \mathrm{Rep}M$, notons $\mathrm{ind}_P^G\sigma$ l'espace des fonctions $f : G \to W$ telles que
- $f(nmg) = \sigma(m)f(g)$, si $n \in N$, $m \in M$ et $g \in G$,
- f est invariante à droite par un sous-groupe ouvert de G.

Le groupe G opère par translation à droite et on obtient ainsi une représentation lisse de G. On pose $\mathrm{Ind}_P^G\sigma = \mathrm{ind}_P^G(\sigma\delta_P^{1/2})$, où δ_P est le caractère module de P, c'est-à-dire, le caractère de $M \cong P/N$ donné par : $\delta_P(m) = [mN_0m^{-1} : N_0]$ pour un arbitraire sous-groupe ouvert compact N_0 de N.

(b) Soit $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}G$, on note V_N le quotient de V par le sous-espace $V(N)$ engendré par les éléments $\pi(n)x - x$ ($n \in N$, $x \in V$). On définit $(r_P^G\pi, V_N) \in \mathrm{Rep}M$ par

$$r_P^G(m)(v + V(N)) = \delta_P^{-1/2}(m)(\pi(m)v + V(N)),\quad m \in M,\ v \in V.$$

2.2 Rappels de quelques constructions

Rappelons que dans [3], §4, sont définies deux catégories $\mathrm{WD}_{L'/L}$ et $\mathrm{MOD}_{L'/L}$:

(i) $\mathrm{WD}_{L'/L}$: la catégorie des K-représentations (r, N, V) du groupe de Weil-Deligne de L ([7], §8) sur un K-espace vectoriel V de dimension finie telles que la restriction de r à $W(\overline{\mathbb{Q}}_p/L')$ est non-ramifiée ;

(ii) $\mathrm{MOD}_{L'/L}$ (ou $\mathrm{MOD}_{L'/L,K}$ s'il y a risque de confusion sur K) : la catégorie des quadruples $(\varphi, N, \operatorname{Gal}(L'/L), D)$ constitués par :
- un $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-module D libre de rang fini ;
- un Frobenius $\varphi : D \to D$, c'est-à-dire une bijection φ tel que $\varphi((l \otimes k)\cdot d) = (\varphi'_0(l) \otimes k)\cdot\varphi(d)$, pour $l \in L'_0$, $k \in K$, $d \in D$;

– un endomorphisme $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-linéaire $N : D \to D$ tel que $N\varphi = p\varphi N$;
– une action de $\mathrm{Gal}(L'/L)$ sur D commutant avec celles de φ et N, telle que $g((l \otimes k) \cdot d) = (g(l) \otimes k) \cdot g(d)$, pour $g \in \mathrm{Gal}(L'/L)$, $l \in L'_0$, $k \in K$, $d \in D$.
– morphismes : les homomorphismes $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-linéaires conservant les actions de φ, N et $\mathrm{Gal}(L'/L)$.

Rappelons aussi que dans [3], §4 (ou [12]), sont définis un foncteur

$$\mathrm{WD} : \mathrm{MOD}_{L'/L} \to \mathrm{WD}_{L'/L}$$

et un quasi-inverse MOD : WD $\to$ MOD de WD. Ces deux foncteurs induisent une équivalence entre les deux catégories. On rappelle la construction dans la suite.

– Soit $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)$ un objet de $\mathrm{MOD}_{L'/L}$. D'abord, l'isomorphisme $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K \cong \prod_{\sigma'_0 : L'_0 \hookrightarrow K} K$ induit un isomorphisme

$$D \cong \prod_{\sigma'_0 : L'_0 \hookrightarrow K} D_{\sigma'_0} \tag{1}$$

avec $D_{\sigma'_0} = (0, \cdots, 0, 1_{\sigma'_0}, 0, \cdots, 0)D$. Choisissons un plongement $\sigma'_0 : L'_0 \hookrightarrow K$ et posons $V = D_{\sigma'_0}$. Alors N induit un endomorphisme K-linéaire nilpotent sur V que l'on note encore par N. Si $w \in W(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$, on définit $r(w) = \overline{w} \circ \varphi^{-\alpha(w)}$ où $\overline{w}$ désigne l'image de w dans $\mathrm{Gal}(L'/L)$ et $\alpha(w) \in f\mathbb{Z}$ est l'unique entier tel que l'action induite de w sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ soit la $\alpha(w)$-puissance du Frobenius arithmétique $x \mapsto x^p$. On vérifie que $r(w) : D \to D$ est $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-linéaire, et donc induit un morphisme K-linéaire $r(w) : V \to V$. Ceci définit un objet de $\mathrm{WD}_{L'/L}$ que l'on note $\mathrm{WD}((\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D))$. Remarquons que la représentation (r, N, V) est indépendante du choix de σ'_0 mais à isomorphisme non canonique près (cf. [2], lemme 2.2.1.2).

– Soit (r, N, V) un objet de $\mathrm{WD}_{L'/L}$ et choisissons un plongement $\sigma'_0 : L'_0 \hookrightarrow K$. On pose

$$D = \bigoplus_{n=0}^{f'-1} V_{\sigma'_0 \circ \varphi_0'^{-n}},$$

où $V_{\sigma'_0 \circ \varphi_0'^{-n}} = V$ est muni de l'action de L'_0 via $\sigma'_0 \circ \varphi_0'^{-n}$, ce qui fait de D un $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-module libre. On définit φ, N par

$$\begin{cases} \varphi|_{V_{\sigma'_0 \circ \varphi_0'^{1-f'}}} = r(\omega) : V_{\sigma'_0 \circ \varphi_0'^{1-f'}} \to V_{\sigma'_0} \\ \varphi|_{V_{\sigma'_0 \circ \varphi_0'^{-n}}} = \mathrm{Id} : V_{\sigma'_0 \circ \varphi_0'^{-n}} \to V_{\sigma'_0 \circ \varphi_0'^{-n-1}} \quad \text{si } 0 \leq n \leq f' - 2 \end{cases}$$

où ω est n'importe quel Frobenius géométrique dans $W(\overline{\mathbb{Q}}_p/L')$, et

$$\begin{cases} N|_{V_{\sigma'_0}} = N|_V : V_{\sigma'_0} \to V_{\sigma'_0} \\ N|_{V_{\sigma'_0 \circ \varphi_0'^{-n}}} = p^n \varphi^n \circ N|_V \circ \varphi^{-n} : V_{\sigma'_0 \circ \varphi_0'^{-n}} \to V_{\sigma'_0 \circ \varphi_0'^{-n}} \quad \text{si } 1 \leq n \leq f' - 1. \end{cases}$$

Finalement, pour $g \in \mathrm{Gal}(L'/L)$, soit $w \in W(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$ un relèvement de g, on définit l'action de g sur $V_{\sigma'_0 \circ \varphi_0'^{-n}}$ par

$$g = r(w) \circ \varphi^{\alpha(w)} : V_{\sigma'_0 \circ \varphi_0'^{-n}} \to V_{\sigma'_0 \circ \varphi_0'^{-n-\alpha(w)}},$$

où , si $n+\alpha(w) > f'-1$ ou $n+\alpha(w) < 0$, on regarde $V_{\sigma'_0\circ\varphi_0'^{-n-\alpha(w)}}$ comme $V_{\sigma'_0\circ\varphi_0'^{-k}}$ où k est l'unique entier tel que

$$0 \leq k \leq f'-1 \quad \text{et} \quad n+\alpha(w) \equiv k \pmod{f'}.$$

On vérifie que $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)$ ainsi défini est un objet de $\mathrm{MOD}_{L'/L}$ que l'on note $\mathrm{MOD}((r, N, V))$.

Remarque 2.1. Soit $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)$ un objet de $\mathrm{MOD}_{L'/L}$ qui est absolument irréductible (donc $N = 0$). Comme $\varphi^{f'}$ est $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-linéaire et commute avec $\mathrm{Gal}(L'/L)$ et φ, on voit que $\varphi^{f'}$ est scalaire à valeur dans $K^\times$.

Maintenant, soit $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)$ un objet de $\mathrm{MOD}_{L'/L}$. On définit

$$t_N(D) = \frac{1}{[L:L_0]f'} \mathrm{val}_L(\det{}_{L'_0}(\varphi^{f'}|_D)).$$

Posons $D_{L'} = D \otimes_{L'_0} L'$ et pour $\sigma : L \hookrightarrow K$,

$$D_{L',\sigma} = D_{L'} \otimes_{L'\otimes_{\mathbb{Q}_p} K} (L' \otimes_{L,\sigma} K),$$

on a alors $D_{L'} \simeq \prod_{\sigma:L\hookrightarrow K} D_{L',\sigma}$. Donc la donnée d'une filtration décroissante exhaustive séparée sur $D_{L'}$ par des sous-$L' \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-modules $(\mathrm{Fil}^i D_{L'})_{i\in\mathbb{Z}}$ (pas forcément libres) stables sous l'action de $\mathrm{Gal}(L'/L)$ équivaut à la donnée, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et tout $\sigma : L \hookrightarrow K$, d'un sous-$L' \otimes_{L,\sigma} K$-module $\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma}$ de $D_{L',\sigma}$, qui est stable par $\mathrm{Gal}(L'/L)$ (donc nécessairement libre), et qui vérifie $\mathrm{Fil}^{i+1} D_{L',\sigma} \subset \mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma}$ pour tout i et σ, et $\cup_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma} = D_{L',\sigma}$, $\cap_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma} = 0$ pour tout σ. Soit $(\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma})_{i\in\mathbb{Z},\sigma:L\hookrightarrow K}$ une telle filtration. On définit

$$t_H(D_{L'}) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{\sigma:L\hookrightarrow K} i \dim_{L'}(\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma}/\mathrm{Fil}^{i+1} D_{L',\sigma}).$$

La filtration est dite *admissible* si $t_H(D_{L'}) = t_N(D)$ et si pour tout sous-L'_0-espace vectoriel D' de D stable par φ et N, on a $t_H(D'_{L'}) \leq t_N(D')$, où $D'_{L'}$ est muni de la filtration induite par $D_{L'}$. Par [2], proposition 3.1.1.5 et [11], proposition 4.4.9, pour que la filtration soit admissible, il suffit de vérifier $t_H(D_{L'}) = t_N(D)$ et l'inégalité $t_H(D'_{L'}) \leq t_N(D')$ pour les sous-$L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-modules D' stables par φ, N et $\mathrm{Gal}(L'/L)$ (nécessairement libres), c'est-à-dire les sous-objets de D dans $\mathrm{MOD}_{L'/L}$.

Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $G_n = GL_n(L)$ et $G = G_{d+1}$ où $d \geq 1$ est un entier fixé. Une *partition* de l'entier n est une suite $\alpha = (n_1, ..., n_r)$ d'entiers positifs tels que $n = n_1 + \cdots + n_r$. Étant donnée une telle partition, on note P_α le groupe formé des matrices inversibles triangulaires supérieures par blocs, i.e.,

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} G_{n_1} & * & \cdots & * \\ 0 & G_{n_2} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_{n_r} \end{pmatrix}.$$

On note $M_\alpha = M_{P_\alpha}$ son quotient de Levi et $N_\alpha = N_{P_\alpha}$ son radical unipotent. Le groupe P_α sera appelé sous-groupe *parabolique standard* de G_n. Si α et β sont deux partitions de n, on dit que β est une *sous-partition* de α si $M_\beta \subseteq M_\alpha$ (notation : $\beta \leq \alpha$).

On fixe un choix de $q^{1/2}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. À une représentation (r, N, V) de dimension $d+1$ telle que r soit semi-simple, la correspondance de Langlands locale permet d'associer une représentation irréductible lisse π^{unit} de G sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ normalisée de sorte que son caractère central soit $\det(r, N, V) \circ \mathrm{rec}^{-1}$. Notons que la définition dépend du choix de $q^{1/2}$. Dans [3], cette correspondance est modifiée comme suit :

- si π^{unit} est générique (cf. [13], §2.3), alors $\pi^{\mathrm{unit}} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p} |\det|_L^{-d/2}$ admet un unique modèle sur K qui ne dépend pas du choix de $q^{1/2}$; on le note π ;
- si π^{unit} n'est pas générique, elle s'écrit comme l'unique quotient d'une induction parabolique
$$\mathrm{Ind}_{P_\alpha}^G L(b_1, \tau_1) \otimes \cdots \otimes L(b_s, \tau_s),$$
où $\alpha = (b_1 n_1, \ldots, b_s n_s)$ est une partition de $d+1$, les τ_i sont des représentations irréductibles cuspidales de $\mathrm{GL}_{n_i}(L)$, les $L(b_i, \tau_i)$ sont des Steinberg généralisés, c'est-à-dire, $L(b_i, \tau_i)$ est l'unique quotient irréductible de
$$\mathrm{Ind}_{P_{\alpha_i}}^{G_{b_i n_i}} \tau_i \otimes \tau_i |\det|_L \otimes \cdots \otimes \tau_i |\det|_L^{b_i - 1}$$
où α_i est la partition $(n_i, \ldots, n_i)$ de $b_i n_i$ (cf. [5], §3.1). On a le résultat suivant :

Lemme 2.2. *([3], Lemma 4.2) La représentation*
$$(\mathrm{Ind}_{P_\alpha}^G L(b_1, \tau_1) \otimes \cdots \otimes L(b_s, \tau_s)) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p} |\det|_L^{-d/2}$$
admet un unique modèle sur K qui ne dépend pas du choix de $q^{1/2}$. On le note π.

Si on suppose que K est gros au sens où tous les $L(b_i, \tau_i)$ sont fixées par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$, alors la définition de π est plus directe. En fait, si on pose
$$\mathcal{L}(b_i, \tau_i) = L(b_i, \tau_i) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p} |\det|_L^{(1-b_i n_i)/2},$$
alors $\mathcal{L}(b_i, \tau_i)$ ne dépend pas du choix de $q^{1/2}$ et est fixée par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$. D'après [5], proposition 3.2, elle admet un modèle unique défini sur K qu'on note π_i. Comme on peut récrire la représentation originale sous la forme ([3], (7))
$$\mathrm{ind}_{P_\alpha}^G \mathcal{L}(b_1, \tau_1) \otimes \mathcal{L}(b_2, \tau_2) |\det|_L^{-b_1 n_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}(b_s, \tau_s) |\det|_L^{-\sum_{j=1}^{s-1} b_j n_j},$$
on obtient le modèle π en posant
$$\pi = \mathrm{ind}_{P_\alpha}^G \pi_1 \otimes \pi_2 |\det|_L^{-b_1 n_1} \otimes \cdots \otimes \pi_s |\det|_L^{-\sum_{j=1}^{s-1} b_j n_j}.$$

2.3 Rappels sur la conjecture et compléments

On fixe :

(i) un objet (r, N, V) de $\mathrm{WD}_{L'/L}$ de dimension $d+1$ tel que r est semi-simple ;

(ii) pour tout $\sigma : L \hookrightarrow K$, un ensemble de $d+1$ entiers $i_{1,\sigma} < \cdots < i_{d+1,\sigma}$.

À (r, N, V) dans (i) on associe une représentation lisse π comme au §2.2. Pour des $i_{j,\sigma}$ dans (ii), on pose

$$a_{j,\sigma} = -i_{d+2-j,\sigma} - (j-1),$$

et on note ρ l'unique représentation $\mathbb{Q}_p$-rationnelle de G dont le plus haut poids est $\psi : \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_{d+1}) \mapsto \prod_{j=1}^{d+1} \prod_{\sigma : L \hookrightarrow K} x_j^{a_{j,\sigma}}$ vis-à-vis du sous-groupe des matrices triangulaires inférieures (cf. [3], §2).

Si $(r, N, V) \in \mathrm{WD}_{L'/L}$, on note $(r, N, V)^{\mathrm{ss}} \in \mathrm{WD}_{L'/L}$ sa F-semisimplification ([7], §8.5).

La conjecture ci-dessous est proposée dans [3], Conjecture 4.3 :

Conjecture 2.3. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\rho \otimes_K \pi$ admet une norme invariante, i.e., une norme p-adique $\| \ \|$ telle que $\|gv\| = \|v\|$ pour tout $g \in G$ et $v \in \rho \otimes_K \pi$;

(ii) il existe un objet $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)$ dans $\mathrm{MOD}_{L'/L}$ tel que

$$\mathrm{WD}(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)^{\mathrm{ss}} = (r, N, V),$$

et une filtration admissible $(\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma})_{i,\sigma}$ stable par $\mathrm{Gal}(L'/L)$ sur $D_{L'}$ telle que

$$\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma} / \mathrm{Fil}^{i+1} D_{L',\sigma} \neq 0 \Leftrightarrow i \in \{i_{1,\sigma}, \ldots, i_{d+1,\sigma}\}.$$

Proposition 2.4. *La condition (ii) ne dépend pas du choix de L'. Plus précisément, si L'' est une autre extension finie galoisienne de L telle que*

$$[L''_0 : \mathbb{Q}_p] = |\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L''_0, K)| \quad \textit{et} \quad (r, N, V) \in \mathrm{WD}_{L''/L},$$

alors la condition (ii) est vraie pour L' si et seulement si (ii) est vraie pour L''.

Démonstration. On peut supposer $L' \subset L''$.

(a) Soit $(\varphi', N', \mathrm{Gal}(L'/L), D')$ un objet de $\mathrm{MOD}_{L'/L}$. On pose

$$D'' = L''_0 \otimes_{L'_0} D',$$

et définit φ'', N'' et l'action de $\mathrm{Gal}(L''/L)$ naturellement. Alors, on vérifie facilement que $(\varphi'', N'', \mathrm{Gal}(L''/L), D'')$ est un objet de $\mathrm{MOD}_{L''/L}$. De plus, si

$$\mathrm{WD}(\varphi', N', \mathrm{Gal}(L'/L), D')^{\mathrm{ss}} = (r, N, V)$$

et s'il existe une filtration $(\mathrm{Fil}^i D'_{L',\sigma})_{i,\sigma}$ sur $D'_{L'}$ comme dans (ii), on munit D'' de la filtration induite : $\mathrm{Fil}^i D''_{L'',\sigma} = L'' \otimes_{L'} \mathrm{Fil}^i D'_{L',\sigma}$. On vérifie que cette filtration est stable par $\mathrm{Gal}(L''/L)$ et est admissible (en fait on a $t_N(D') = t_N(D'')$ et $t_H(D'_{L'}) = t_H(D''_{L''})$). On fixe un plongement $\sigma'_0 : L'_0 \hookrightarrow K$ et aussi un plongement $\sigma''_0 : L''_0 \hookrightarrow K$ qui prolonge σ'_0. Alors $x \otimes k \mapsto (1 \otimes x) \otimes k$ induit un isomorphisme entre $D'_{\sigma'_0}$ et $D''_{\sigma''_0}$ (cf. (1)) et cet isomorphisme commute à r et N. Donc on a $\mathrm{WD}(D') \simeq \mathrm{WD}(D'')$.

(b) Soit $(\varphi'', N'', \mathrm{Gal}(L''/L), D'')$ un objet de $\mathrm{MOD}_{L''/L}$ et $(\mathrm{Fil}^i D''_{L'',\sigma})_{i,\sigma}$ une filtration sur $D''_{L''}$ comme dans (ii). Posons $D' = D''^{\mathrm{Gal}(L''/L')}$ que l'on munit des structures induites : action de $\mathrm{Gal}(L'/L)$, opérateurs φ', N' et filtration. On vérifie que $(\varphi', N', \mathrm{Gal}(L'/L), D')$ satisfait à (ii) et on a $L''_0 \otimes_{L'_0} D''^{\mathrm{Gal}(L''/L')} = D''$ par Hilbert 90. □

Proposition 2.5. *Soit K' une extension finie galoisienne de K contenue dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Alors*

(1) la condition (i) est vraie pour K si et seulement si (i) est vraie pour K' ;

(2) la condition (ii) est vraie pour K si et seulement si (ii) est vraie pour K' et la filtration peut être choisie de telle sorte qu'elle soit stable sous l'action de $\mathrm{Gal}(K'/K)$.

Démonstration. (1) est immédiat.

(2) La condition est évidemment nécessaire. Soit $(\varphi', N', \mathrm{Gal}(L'/L), D')$ un objet de $\mathrm{MOD}_{L'/L,K'}$ vérifiant (ii) où D' est un $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K'$-module. Posons $D = D'^{\mathrm{Gal}(K'/K)}$ qui est un $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-module. Comme φ', N' et $\mathrm{Gal}(L'/L)$ commutent avec $\mathrm{Gal}(K'/K)$, on obtient un objet induit $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)$ de $\mathrm{MOD}_{L'/L,K}$. De plus, comme la filtration sur $D'_{L'}$ est stable par $\mathrm{Gal}(K'/K)$, elle induit une filtration sur $D_{L'}$ qui est bien admissible. Comme

$$\mathrm{WD}(D)^{\mathrm{ss}} \otimes_K K' \simeq \mathrm{WD}(D \otimes_K K')^{\mathrm{ss}} = (r, N, V) \otimes_K K',$$

en tant qu'objets de $\mathrm{WD}_{L'/L,K'}$, on a $\mathrm{WD}(D)^{\mathrm{ss}} = (r, N, V)$ en tant qu'objets de $\mathrm{WD}_{L'/L,K}$ par Hilbert 90. □

Remarque 2.6. On verra plus tard que (cf. §4.3, 4.4) si (ii) est vraie pour K', alors on peut toujours choisir une autre filtration admissible qui est stable par $\mathrm{Gal}(K'/K)$. Donc en fait (ii) est vraie pour K' si et seulement si (ii) est vraie pour K.

2.4 L'ordre des (r_i, N_i, V_i)

On conserve les notations du paragraphe précédent. Supposons K suffisamment gros pour pouvoir écrire

$$(r, N, V) = \bigoplus_{i=1}^{s} (r_i, N_i, V_i) \tag{2}$$

avec les (r_i, N_i, V_i) absolument indécomposables de dimension d_i. Posons pour $1 \leq i \leq s$

$$(\varphi_i, N_i, \mathrm{Gal}(L'/L), D_i) = \mathrm{MOD}((r_i, N_i, V_i))$$

qui est donc absolument indécomposable dans $\mathrm{MOD}_{L'/L}$. Posons $D_{i,0} = \mathrm{Ker}(N_i : D_i \to D_i)$ et $\varphi_{i,0} = \varphi_i|_{D_{i,0}}$, donc D_i s'écrit sous la forme (notons que (r_i, N_i, V_i) correspond au $L(b_i, \tau_i)$, cf. §2.2)

$$D_i = D_{i,0} \oplus D_{i,0}(1) \oplus \cdots \oplus D_{i,0}(b_i - 1),$$

où $D_{i,0}(n) = D_{i,0}$ avec $\varphi_i|_{D_{i,0}(n)} = p^n \varphi_{i,0}$, $N_i|_{D_{i,0}} = 0$ et N_i envoie $D_{i,0}(n)$ dans $D_{i,0}(n-1)$ par l'identité pour $n > 0$. On dit que D_i et D_j sont *de même type* si

$$\mathrm{Hom}_{\varphi, \mathrm{Gal}(L'/L)}(D_i, D_j) \neq 0$$

où $\mathrm{Hom}_{\varphi,\mathrm{Gal}(L'/L)}(D_i, D_j)$ désigne le groupe des homomorphismes $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-linéaires de D_i dans D_j conservant les actions de φ et $\mathrm{Gal}(L'/L)$. Remarquons que si D_i et D_j sont de même type, alors il existe un entier $l \in \mathbb{Z}$ tel que $D_{j,0} \simeq D_{i,0}(l)$ comme $(\varphi, \mathrm{Gal}(L'/L))$-modules.

On choisit un ordre des $\{(r_i, N_i, V_i),\ 1 \leq i \leq s\}$ de telle sorte que (toujours possible) :

$$\begin{aligned} \{1, \ldots, s\} &= H_1 \sqcup H_2 \sqcup \cdots \sqcup H_v \\ &= \{1, \ldots, s_1\} \sqcup \{s_1 + 1, \ldots, s_2\} \sqcup \cdots \sqcup \{s_{v-1} + 1, \ldots, s\} \end{aligned} \tag{3}$$

vérifiant les conditions suivantes :

- $k_1, k_2 \in H_i$ si et seulement s'il existe $j_1, \ldots, j_m$ tels que D_{k_1} et D_{j_1}, D_{j_i} et $D_{j_{i+1}}$ $(1 \leq i \leq m-1)$, D_{j_m} et D_{k_2} sont de même type ;
- pour i fixé, si $k_1, k_2 \in H_i$, $k_1 \neq k_2$ et $D_{k_1,0}(l) \simeq D_{k_2,0}$ avec $l > 0$, alors $k_1 < k_2$;
- si $D_{k_1,0} \simeq D_{k_2,0}$, et $b_{k_1} < b_{k_2}$, alors $k_1 < k_2$;
- Pour $i \neq j$, posons $M_i = \oplus_{k \in H_i} D_k$, $M_j = \oplus_{k \in H_j} D_k$. Si $t_N(M_i)/\mathrm{dim} M_i < t_N(M_j)/\mathrm{dim} M_j$, alors $i < j$.

Proposition 2.7. *Choisissons un ordre sur les (r_i, N_i, V_i) comme précédemment et soient $L(b_i, \tau_i)$ les représentations définies dans §2.2, alors la condition "ne précède pas" est vérifiée ([13], Definition 1.2.4).*

Démonstration. Supposons l'énoncé faux, et prenons $i < j$ tel que $L(b_i, \tau_i)$ précède $L(b_j, \tau_j)$, ce qui implique $\tau_i(l) = \tau_i |\det|_L^l \simeq \tau_j$ pour un entier $l > 0$ tel que $l + b_j > b_i$. Alors par la correspondance

$$L(b_i, \tau_i) \leftrightarrow (r_i, N_i, V_i) \leftrightarrow D_i,$$

plus précisément,

$$\tau_i |\det|_L^l \leftrightarrow D_{i,0}(b_i - 1 - l), \quad \tau_j \leftrightarrow D_{j,0}(b_j - 1),$$

on obtient

$$D_{i,0} \simeq D_{j,0}((l + b_j - b_i)),$$

ce qui contredit $i < j$ puisque $l + b_j - b_i > 0$. □

2.5 Module de Jacquet et un lemme d'Emerton

On rappelle un lemme d'Emerton. On renvoie le lecteur à [8] ou [10] pour la définition d'une représentation localement analytique.

Soit P un sous-groupe parabolique de G avec N son radical unipotent et M son quotient de Levi. Dans [10], §3, est défini un foncteur "module de Jacquet" J_P ayant la propriété suivante :

Proposition 2.8. *Soient ρ une K-représentation algébrique irréductible de G et π une K-représentation admissible lisse de G, alors il existe un isomorphisme canonique de M-représentations*

$$J_P(\rho \otimes_K \pi) \xrightarrow{\sim} \rho^N \otimes_K (r_P^G \pi) \delta_P^{1/2}.$$

Démonstration. Voir [10], Proposition 4.3.6. □

On note $Z(M)$ le centre de M ; soit N_0 un sous-groupe ouvert compact de N, on pose

$$Z(M)^+ = \{z \in Z(M) | \; zN_0z^{-1} \subset N_0\}.$$

Lemme 2.9. *(Emerton) Conservons les notations ci-dessus. Soient V une K-représentation localement analytique de G et $\chi : Z(M) \to K^\times$ un caractère localement analytique de $Z(M)$. On considère les deux conditions :*

(1) V admet une norme invariante ;

(2) Si $\mathrm{Hom}_{Z(M)}(\chi, J_P(V)) \neq 0$, alors

$$|\chi(z)\delta_P^{-1}(z)|_p \leq 1, \qquad \forall z \in Z(M)^+.$$

Alors (1) entraîne (2).

Démonstration. Voir [9], Lemma 1.6 ou [10], Lemma 4.4.2. □

Définition 2.10. On dit que V satisfait à la *condition d'Emerton* si pour tout P, N_0 et χ comme ci-dessus la condition (2) du lemme 2.9 est vérifiée.

Remarque 2.11. Comme tout sous-groupe parabolique de G est conjugué à un parabolique standard, on peut supposer que P est un parabolique standard dans la définition 2.10. Aussi on peut supposer $N_0 = N \cap \mathrm{M}_{d+1}(\mathcal{O}_L)$, où $\mathrm{M}_{d+1}(\mathcal{O}_L)$ est l'anneau des matrices carrées $(d+1) \times (d+1)$ à coefficients dans $\mathcal{O}_L$.

2.6 Théorème principal

Le résultat principal de cet article est le suivant.

Théorème 2.12. *Supposons K galoisienne et suffisamment grosse telle que l'on a*

$$(r, N, V) = \bigoplus_{i=1}^{s} (r_i, N_i, V_i)$$

avec les (r_i, N_i, V_i) absolument indécomposables de dimension d_i. On considère les quatre conditions suivantes :

(i) $\rho \otimes_K \pi$ admet une norme invariante.

(ii) Il existe un objet $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)$ dans $\mathrm{MOD}_{L'/L}$ tel que :

$$WD(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)^{\mathrm{ss}} = (r, N, V),$$

et une filtration admissible $(\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma})_{i,\sigma}$ stable par $\mathrm{Gal}(L'/L) \times \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}_p)$ sur $D_{L'}$ telle que

$$\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma}/\mathrm{Fil}^{i+1} D_{L',\sigma} \neq 0 \Leftrightarrow i \in \{i_{1,\sigma}, \ldots, i_{d+1,\sigma}\}.$$

(iii) Avec l'ordre des D_i comme en §2.4, les inégalités suivantes sont vérifiées

$$[K : L] \sum_{j=1}^{d_1} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma} \leq t_N(D_1),$$

$$\vdots$$

$$[K:L]\sum_{j=1}^{d_1+\cdots+d_{s-1}}\sum_{\sigma} i_{j,\sigma} \leq \sum_{i=1}^{s-1} t_N(D_i),$$

$$[K:L]\sum_{j=1}^{d+1}\sum_{\sigma} i_{j,\sigma} = \sum_{i=1}^{s} t_N(D_i) = t_N(D).$$

(iv) Le caractère central de $\rho\otimes_K\pi$ est unitaire et V satisfait à la condition d'Emerton.
Alors, $(i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv)$.

Remarque 2.13. (1) L'implication "$(ii) \Rightarrow (iii)$" découle de la définition d'admissibilité.
(2) L'implication "$(i) \Rightarrow (iv)$" est une redite du lemme 2.9 et [3], Proposition 5.1.

Remarque 2.14. Si on pose $b = b_1 + \cdots + b_s$,

$$D'_1 = D_{1,0}, \ldots, D'_{b_1} = D_{1,0}(b_1-1), \ldots, \ldots, D'_b = D_{s,0}(b_s-1),$$

et $d'_i = \mathrm{rg}_{L'_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}K} D'_i$, alors pour toute permutation $\nu \in S_b$, on a

$$[K:L]\sum_{j=1}^{d'_{\nu(1)}}\sum_{\sigma} i_{j,\sigma} \leq t_N(D'_{\nu(1)}),$$

$$\vdots$$

$$[K:L]\sum_{j=1}^{d'_{\nu(1)}+\cdots+d'_{\nu(b-1)}}\sum_{\sigma} i_{j,\sigma} \leq \sum_{i=1}^{b-1} t_N(D'_{\nu(i)}),$$

$$[K:L]\sum_{j=1}^{d+1}\sum_{\sigma} i_{j,\sigma} = \sum_{i=1}^{b} t_N(D'_{\nu(i)}) = t_N(D).$$

Démonstration. Ceci résulte de l'ordre des (r_i, N_i, V_i) (cf. §2.4). Plus précisément, la condition (iii) dit que le polygen passant l'origine et les points $(\sum_{i=1}^{k} d_i, \sum_{i=1}^{k} t_N(D_i))_{1\leq k\leq s}$ est dessus celui passant l'origine et les points $(\sum_{i=1}^{k} d_i, [K:L]\sum_{j=1}^{d_1+\cdots+d_k}\sum_{\sigma} i_{j,\sigma})_{1\leq k\leq s}$, et l'ordre des D_i qu'on a choisi implique que cela reste vrai pour les autres ordres. Enfin en utilisant la proposition 4.19 (plus loin) à plusieurs reprises, l'énoncé s'en déduit. □

Remarque 2.15. D'après le théorème 2.12, la conjecture 2.3 se "réduit" à (iv)⇒(i) (supposons K suffisamment gros). Il y a un résultat analogue dans le cas complexe (cf. [4], Theorem 4.4.6).

Corollaire 2.16. *Avec les notations comme dans la conjecture 2.3, on a l'implication*

$$(i) \Rightarrow (ii).$$

Démonstration. Ceci est une conséquence du théorème 2.12 et la proposition 2.5. □

3 Preuve de (iii)$\Leftrightarrow$ (iv)

Dans ce chapitre, on prouve l'équivalence $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ (sous l'hypothèse que K est suffisamment gros). Conservons les notations précédentes : $G = \mathrm{GL}_{d+1}(L)$, $d_i = b_i n_i$, $\alpha = (d_1, \dots, d_s)$, τ_i est une représentation cuspidale irréductible de G_{n_i}, $L(b_i, \tau_i)$ est le Steinberg généralisé, $P = P_\alpha$ est le sous-groupe parabolique standard correspondant à la partition α avec N_α son radical unipotent et M_α son quotient de Levi, π est l'unique modèle sur K de la représentation

$$\mathrm{Ind}_{P_\alpha}^G L(b_1, \tau_1) \otimes \cdots \otimes L(b_s, \tau_s) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p} |\det|_L^{-d/2},$$

ρ est la représentation rationnelle de G associée aux entiers $\{a_{j,\sigma}\}_{j,\sigma}$ et ψ son plus haut poids. On note $\tau = L(b_1, \tau_1) \otimes \cdots \otimes L(b_s, \tau_s)$ et on fixe $Q = P_\beta$ un parabolique standard de G où $\beta = (m_1, \dots, m_r)$ est une partition de $d + 1$.

3.1 Le foncteur $r_Q^G \circ \mathrm{Ind}_P^G$

Dans ce n°, on trouve une condition équivalente pour qu'un caractère χ de $Z(M_\beta)$ soit tel que

$$\mathrm{Hom}_{Z(M_\beta)}(\chi, r_Q^G \circ \mathrm{Ind}_P^G(\tau)) \neq 0.$$

D'abord on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1. *Soient $l = km$ et τ' une représentation cuspidale irréductible de G_m. Si $\gamma = (l_1, \dots, l_n)$ est une partition de l, alors $r_{P_\gamma}^{G_l}(L(k, \tau')) \neq 0$ si et seulement si $m | l_i$ pour tout i, et dans ce cas $r_{P_\gamma}^{G_l}(L(k, \tau'))$ est irréductible et égal à*

$$L(p_n, \tau' |\det|^{p_1 + \cdots + p_{n-1}}) \otimes \cdots \otimes L(p_1, \tau'),$$

où $p_i = l_i/m$. Son caractère central est égal à la restriction de

$$\big(\chi(\tau')|\det|_L^{p_1 + \cdots + p_{n-1}} \otimes \cdots \otimes \chi(\tau')|\det|_L^{k-1}\big) \otimes \cdots \otimes \big(\chi(\tau') \otimes \cdots \otimes \chi(\tau')|\det|_L^{p_1 - 1}\big)$$

à $Z(M_\gamma)$, où $\chi(\tau')$ désigne le caractère central de τ'.

Démonstration. C'est une conséquence des propositions 1.5 et 9.5 de [16]. $\square$

Maintenant posons $\gamma = (\underbrace{n_1, \dots, n_1}_{b_1 \ fois}, \underbrace{n_2, \dots, n_2}_{b_2 \ fois}, \dots, \underbrace{n_s, \dots, n_s}_{b_s \ fois})$ la partition de $d + 1$, et

$$\chi_\gamma = (\chi(\tau_1) \otimes \cdots \otimes \chi(\tau_1)|\det|_L^{b_1 - 1}) \otimes \cdots \otimes (\chi(\tau_s) \otimes \cdots \otimes \chi(\tau_s)|\det|_L^{b_s - 1})$$

alors χ_γ est un caractère lisse de $Z(M_\gamma)$ dont le restriction à $Z(M_\alpha)$ est le caractère central de τ. Posons $W \simeq S_{d+1}$ le groupe de Weyl de G, $P_0 = P_{(1,\dots,1)}$ et

$$W^{\alpha,\beta} = \{w \in W | w(M_\alpha \cap P_0)w^{-1} \subset P_0, w^{-1}(M_\beta \cap P_0)w \subset P_0\}.$$

Si $w \in W^{\alpha,\beta}$ et on pose $\alpha' = \alpha \cap w^{-1}\beta w$ (cf. [16], §1.2), alors $\alpha' \leq \alpha$. Si de plus $\gamma \leq \alpha'$, c'est-à-dire, $M_\gamma \subseteq M_{\alpha'}$, on a $Z(M_{\alpha'}) \subseteq Z(M_\gamma)$, via lequel on peut voir χ_γ comme un caractère de $Z(M_{\alpha'})$ et de même on voit $\chi_\gamma^{w^{-1}}$ comme un caractère de $Z(M_{\beta'})$, où $\beta' = w\alpha w^{-1} \cap \beta$ et $\chi_\gamma^{w^{-1}}(z) = \chi_\gamma(w^{-1}zw)$.

Proposition 3.2. *(1) Si $P = Q$ (donc $\alpha = \beta$), on a* $\mathrm{Hom}_{Z(M_\alpha)}(\chi_\gamma, r_P^G \circ \mathrm{Ind}_P^G(\tau)) \neq 0$.

(2) $\mathrm{Hom}_{Z(M_\beta)}(\chi, r_Q^G \circ \mathrm{Ind}_P^G(\tau) \neq 0$ *si et seulement s'il existe une permutation* $w \in W^{\alpha,\beta}$ *telle que*

$$\gamma \leq \alpha \cap w^{-1}\beta w \quad \textit{et} \quad \chi = \chi_\gamma^{w^{-1}}|_{Z(M_\beta)}.$$

Démonstration. (1) est un cas spécial de (2) en posant $w = 1$, et (2) se déduit du lemme 3.1 et de [16], Theorem 1.2 et Proposition 1.6. □

En vue de la définition de ρ, on considère aussi les sous-groupes paraboliques inférieurs. Posons

$$w_0 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{d+1}(L),$$

et $Q^* = w_0 Q w_0^{-1}$, $N_\beta^* = w_0 N_\beta w_0^{-1}$, $M_\beta^* = w_0 M_\beta w_0^{-1}$.

Par la proposition 3.2, on obtient

Corollaire 3.3. *(1) Si $P = Q$, on a* $\mathrm{Hom}_{Z(M_\alpha^*)}\big(\chi_\gamma^{w_0}\psi\delta_{P^*}^{1/2}|\det|_L^{-d/2}, J_{P^*}(\rho\otimes\pi)\big) \neq 0$ *;*

(2) $\mathrm{Hom}_{Z(M_\beta^*)}\big(\chi, J_{Q^*}(\rho\otimes\pi)\big) \neq 0$ *si et seulement s'il existe* $w \in W^{\alpha,\beta}$ *tel que*

$$\gamma \leq \alpha \cap w^{-1}\beta w, \quad \textit{et} \quad \chi = (\chi_\gamma^{w^{-1}w_0}\psi\delta_{Q^*}^{1/2}|\det|_L^{-d/2})|_{Z(M_\beta^*)}.$$

Démonstration. Ce corollaire se déduit de la proposition 3.2 et des faits suivants :

(a) d'après la proposition 2.8,

$$J_{Q^*}(\rho\otimes\pi) \simeq \rho^{N_\beta^*} \otimes (r_{Q^*}^G \pi)\delta_{Q^*}^{1/2} = \rho^{N_\beta^*} \otimes (r_{Q^*}^G \circ \mathrm{Ind}_P^G \tau)|\det|_L^{-d/2}\delta_{Q^*}^{1/2};$$

(b) $\rho^{N_\beta^*}$ est une représentation algébrique irréductible de M_β^* dont le caractère central est la restriction de ψ à $Z(M_\beta^*)$;

(c) si $\sigma \in \mathrm{Rep}G$, alors $\mathrm{Hom}_{Z(M_\beta)}(\chi, r_Q^G(\sigma)) \neq 0$ si et seulement si $\mathrm{Hom}_{Z(M_\beta^*)}(\chi^{w_0}, r_{Q^*}^G(\sigma)) \neq 0$. □

3.2 La preuve

(iii) $\Rightarrow$ *(iv)* *:* D'abord par [3], Proposition 5.1, le caractère central de $\rho\otimes_K\pi$ est unitaire.

Posons $N_0^* = N_\beta^* \cap \mathrm{M}_{d+1}(\mathcal{O}_L) \subset N_\beta^*$, $Z(M_\beta^*)^+ = \{z \in Z(M_\beta^*) | z N_0^* z^{-1} \subset N_0^*\}$. Soit $w \in W^{\alpha,\beta}$ tel que $\gamma \leq \alpha \cap w^{-1}\beta w$. D'après le corollaire 3.3 et la remarque 2.11, il suffit de prouver

$$(*) \qquad \mathrm{val}_p\big(\chi_\gamma^{w^{-1}w_0}\psi\delta_{Q^*}^{-1/2}|\det|_L^{-d/2}(z)\big) \geq 0, \quad \forall z \in Z(M_\beta^*)^+.$$

On récrit $\chi_\gamma^{w^{-1}}|_{Z(M_\beta)}$ sous la forme

$$\chi_1' \otimes \cdots \otimes \chi_r'$$

avec $\chi_i' : Z(G_{m_i}) \to K^\times$. Soit $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_r$, on pose (rappelons que $\beta = (m_1, \cdots, m_r)$)

$$z = z(t_1, \ldots, t_r) = \mathrm{diag}(p^{t_1}\mathbb{1}_{m_r}, \ldots, p^{t_r}\mathbb{1}_{m_1}),$$

où $\mathbb{1}_{m_i}$ désigne la matrice identité d'ordre m_i. Alors $z \in Z(M_\beta^*)^+$ et on voit qu'il suffit de prouver $(*)$ pour $z \in Z(M_\beta^*)^+$ de cette forme.

On calcule $\mathrm{val}_p(\chi_\gamma^{w^{-1}w_0}(z))$, $\mathrm{val}_p(\psi(z))$, $\mathrm{val}_p(\delta_{Q^*}^{-1/2}(z))$ et $|\det|_L^{-d/2}$ respectivement.

(a) Trivialement on a

$$\mathrm{val}_p(\chi_\gamma^{w^{-1}w_0}(z)) = \sum_{i=1}^{r} t_{r+1-i}\big(\mathrm{val}_p(\chi_i'(p\mathbb{1}_{m_i}))\big)$$

et

$$\mathrm{val}_p(|\det(z)|_L^{-d/2}) = \frac{d}{2}[L:\mathbb{Q}_p]\sum_{i=1}^{r} m_i t_{r+1-i}.$$

(b) Par la définition de ρ, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{val}_p(\psi(z)) &= t_1\big(\sum_{j=1}^{m_r}\sum_\sigma a_{j,\sigma}\big)+\cdots+t_r\big(\sum_{j=m_r+\cdots+m_2+1}^{d+1}\sum_\sigma a_{j,\sigma}\big)\\
&= -t_1\sum_{j=1}^{m_r}\sum_\sigma i_{d+2-j,\sigma}-\cdots-t_r\sum_{j=m_r+\cdots+m_2+1}^{d+1}\sum_\sigma i_{d+2-j,\sigma}\\
&\quad -[L:\mathbb{Q}_p]t_1\tfrac{m_r(m_r-1)}{2}-\cdots-[L:\mathbb{Q}_p]t_r\frac{m_1(2\sum_{j>1}m_j+m_1-1)}{2}\\
&= -\sum_{i=1}^{r}(t_{r+1-i}\sum_{j=m_1+\cdots+m_{i-1}+1}^{m_1+\cdots+m_i}\sum_\sigma i_{j,\sigma})\\
&\quad -\tfrac{1}{2}[L:\mathbb{Q}_p]\big(\sum_{i=1}^{r}t_{r+1-i}m_i(2\sum_{j>i}m_j+m_i-1)\big).
\end{aligned}$$

(c) Par [15], chapitre I.2.7, exemple (c), on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{val}_p(\delta_{Q^*}^{-1/2}(z)) &= \tfrac{1}{2}\mathrm{val}_p(\delta_Q^{-1}(w_0zw_0^{-1}))\\
&= -\tfrac{1}{2}[L:\mathbb{Q}_p]\sum_{i=1}^{r}(\sum_{j<i}m_j-\sum_{j>i}m_j)m_it_{r+1-i}.
\end{aligned}$$

Un calcul rapide implique que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{val}_p(\chi_\gamma^{w^{-1}w_0}\psi\delta_{Q^*}^{-1/2}|\det|_L^{-d/2}(z))\\
=\ &\sum_{i=1}^{r}t_{r+1-i}\mathrm{val}_p(\chi_i'(p\mathbb{1}_{m_i}))-\sum_{i=1}^{r}(t_{r+1-i}\sum_{j=m_1+\cdots+m_{i-1}+1}^{m_1+\cdots+m_i}\sum_\sigma i_{j,\sigma}).
\end{aligned}$$

On déduit du fait $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_r$ que la condition $(*)$ est équivalente aux inégalités

$$\sum_{i=1}^{k}\mathrm{val}_p(\chi_i'(p\mathbb{1}_{m_i})) \geq \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=m_1+\cdots+m_{i-1}+1}^{m_1+\cdots+m_i}\sum_\sigma i_{j,\sigma}$$

pout tout $1 \leq k \leq r$. Mais par la correspondance de Langlands locale (non modifiée), le caractère central de $L(b_i,\tau_i)$ est $\det(r_i,N_i,V_i)\circ\mathrm{rec}^{-1}$, on a donc pour tout $1\leq i\leq s$ (cf. [3], Proposition 5.1)

$$\mathrm{val}_p(\chi(\tau_i)|\det|_L^j(p\mathbb{1}_{m_i})) = \frac{1}{[K:L]}t_N(D_{i,0}(b_i-1-j)),\quad j=0,\ldots,b_i-1;$$

et par définition χ_i' est un produit de tels caractères, la remarque 2.14 permet de conclure.

(iv)$\Rightarrow$(iii) : Immédiat à partir du calcul ci-dessus. $\square$

Remarque 3.4. Cette preuve est une généralisation de [9], Lemma 2.1.

4 Preuve de (iii)⇒(ii)

Supposons que (iii) est vrai, on va prouver (ii) dans ce chapitre. Posons

$$(\varphi_i, N_i, \mathrm{Gal}(L'/L), D_i) = \mathrm{MOD}(r_i, N_i, V_i).$$

Convention : comme les $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-modules D' qu'on va traiter sont tous objets de $\mathrm{MOD}_{L'/L}$ libres de rang égal à $\dim_K(\mathrm{WD}(D'))$, on pose $\dim D' = \mathrm{rg}_{L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K} D'$.

4.1 Construction de $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)$

Dans ce paragraphe, on construit un objet spécial $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)$ de $\mathrm{MOD}_{L'/L}$ tel que

$$\mathrm{WD}(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)^{\mathrm{ss}} = (r, N, V).$$

D'abord, on regarde quelques exemples.

Exemples 4.1. On considère le cas $L' = L = \mathbb{Q}_p$ (donc $\mathrm{Gal}(L'/L)$=$\{1\}$). Définissons (φ_0, N_0, D_0) par :

$$D_0 = Ke, \ \varphi_0(e) = e, \ N_0(e) = 0.$$

(1) (a) Soit $D = D_1 \oplus D_2 = D_0 \oplus (D_0 \oplus D_0(1))$, c'est-à-dire,

$$D = K^3 = Ke_1 \oplus Ke_2 \oplus Ke_3$$

avec

$$\varphi(e_1) = e_1, \quad \varphi(e_2) = e_2, \quad \varphi(e_3) = pe_3$$

et

$$N(e_1) = 0, \quad N(e_2) = 0, \quad N(e_3) = e_2.$$

Alors il existe un triplet (i_1, i_2, i_3) tel que

$$i_1 < i_2 < i_3, \quad i_1 + i_2 + i_3 = t_N(D) = 1,$$

et tel qu'il n'existe aucune filtration admissible dont les poids de Hodge-Tate (i.e. les entiers i tels que $\mathrm{Fil}^{-i}D/\mathrm{Fil}^{-i+1}D \neq 0$ avec multiplicité) soient $\{-i_1, -i_2, -i_3\}$. En fait, on peut choisir un triplet (i_1, i_2, i_3) tel que

$$i_1 < i_2 < i_3, \quad i_1 + i_2 + i_3 = t_N(D) = 1, \text{ et } i_2 > 0.$$

Soit $(\mathrm{Fil}^i D)_{i \in \mathbb{Z}}$ une filtration quelconque dont les poids de Hodge-Tate sont $\{-i_1, -i_2, -i_3\}$. Alors $\dim \mathrm{Fil}^{i_2} D = 2$ et si on pose $D' = \mathrm{Fil}^{i_2} D \cap (Ke_1 \oplus Ke_2)$ qui est un sous-objet de D, on a

$$\begin{cases} t_H(D') = i_2 + i_3 > 0 = t_N(D') & \text{si } \mathrm{Fil}^{i_2} D = Ke_1 + Ke_2 \\ t_H(D') \geq i_2 > 0 = t_N(D') & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, la filtration $(\mathrm{Fil}^i D)_{i \in \mathbb{Z}}$ n'est pas admissible, ce qui montre notre énoncé.

La situation sera améliorée si on modifie φ par

$$\varphi^*(e_1) = e_1 + e_2, \quad \varphi^*(e_2) = e_2, \quad \varphi^*(e_3) = pe_3.$$

On vérifie que $p\varphi^* N = N\varphi^*$, et tout sous-objet non trivial de D est de la forme :

$$Ke_2; \quad Ke_i \oplus Ke_j,\ (i,j) = (1,2) \text{ ou } (2,3).$$

On peut construire une filtration telle que

$$t_H(Ke_i) = i_1, \quad t_H(Ke_i \oplus Ke_j) = i_1 + i_2$$

pour $i \neq j$ (cf. lemme 4.8 ci-après), et la condition $i_1 < i_2 < i_3$ entraîne que cette filtration est admissible.

(b) Le même énoncé et la même preuve pour $D = (D_0 \oplus D_0(1)) \oplus D_0(1)$.

(2) Soit $D = D_1 \oplus D_2 = (D_0 \oplus D_0(1)) \oplus (D_0(1) \oplus D_0(2))$, c'est-à-dire,

$$D = Ke_1 \oplus Ke_2 \oplus Ke_3 \oplus Ke_4,$$

$$\varphi(e_1) = e_1, \quad \varphi(e_2) = pe_2, \quad \varphi(e_3) = pe_3, \quad \varphi(e_4) = p^2 e_4;$$
$$N(e_1) = 0, \quad N(e_2) = e_1, \quad N(e_3) = 0, \quad N(e_4) = e_3.$$

On peut énumérer tous les sous-objets non triviaux de D :

$$Ke_i,\ i = 1,3; \quad Ke_i \oplus Ke_j,\ (i,j) = (1,2),(1,3),(3,4);$$

$$Ke_i \oplus Ke_j \oplus Ke_k,\ (i,j,k) = (1,2,3),(1,3,4);$$
$$Ke_1 \oplus Kv, \quad \text{avec } v = e_2 + ae_3,\ a \in K^\times.$$

Soient $\{i_j\}_{1\le j\le 4}$ des entiers tels que

$$\sum_{j=1}^{4} i_j = 4, \quad i_1 < i_2 < i_3 < i_4.$$

On peut construire une filtration $(\mathrm{Fil}^i D)_{i\in\mathbb{Z}}$ sur D telle que (cf. lemme 4.8)

$$\mathrm{Fil}^i D/\mathrm{Fil}^{i+1} D \neq 0 \Leftrightarrow i \in \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$$

et telle que

$$t_H(Ke_i) = i_1, \quad t_H(Ke_i \oplus Ke_j) = i_1 + i_2, \quad t_H(Ke_i \oplus Ke_j \oplus Ke_k) = i_1 + i_2 + i_3,$$

pour tous i, j, k distincts. En particulier, si $D' = Ke_1 \oplus Kv$ avec $v = e_2 + ae_3,\ a \in K^\times$, on a $t_H(D') \le i_1 + i_3$. L'hypothèse sur $\{i_j\}_{1\le j\le 4}$ implique $i_1 + i_3 \le 1$ et on en déduit que la filtration est admissible.

Notons qu'on peut aussi modifier φ comme en (1) :

$$\varphi^*(e_2) = pe_2 + pe_3, \quad \varphi^*(e_i) = \varphi e_i \text{ pour } i \neq 2.$$

On vérifie que $p\varphi^* N = N\varphi^*$ et

$$WD(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)^{\mathrm{ss}} = WD(\varphi^*, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)^{\mathrm{ss}},$$

et que la filtration définie ci-dessus est encore admissible.

(3) Soit $D = D_1 \oplus D_2 = \big(D_0 \oplus D_0(1) \oplus D_0(2)\big) \oplus D_0(1)$. On peut vérifier que si φ^* est un endomorphisme de D tel que $p\varphi^* N = N\varphi^*$ et tel que

$$WD(\varphi^*, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)^{\mathrm{ss}} = WD(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)^{\mathrm{ss}},$$

alors $\varphi^* = \varphi$.

Remarque 4.2. (1) L'exemple dans (1) nous dit que l'on *doit* modifier φ dans certains cas pour qu'il existe une filtration admissible sur D. (Notons que le triplet (i_1, i_2, i_3) vérifie la condition (iii) du théorème 2.12.)

(2) L'exemple (2) nous dit qu'il n'est *pas toujours nécessaire* de modifier φ.

(3) L'exemple (3) nous dit qu'il n'est *pas toujours possible* de modifier φ.

Lemme 4.3. *On fixe un $i \in \{1, \cdots, v\}$ (cf. (3)), et soit $k_1 \in H_i$, $k_2 \in H_i$ tels que $k_1 < k_2$. On peut écrire*

$$D_{k_1} = D_0 \oplus D_0(1) \oplus \cdots \oplus D_0(b_{k_1} - 1),$$

$$D_{k_2} = D_0(l) \oplus D_0(l+1) \oplus \cdots \oplus D_0(l + b_{k_2} - 1),$$

avec $l \geq 0$ et $D_0 = \ker(N : D_{k_1} \to D_{k_1})$ absolument irréductible. Alors

(1) Pour que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{MOD}_{L'/L}}(D_{k_1}, D_{k_2}) \neq 0$ il faut et il suffit que $l \leq b_{k_1} - 1 \leq l + b_{k_2} - 1$. S'il en est ainsi, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{MOD}_{L'/L}}(D_{k_1}, D_{k_2})$ est un K-espace vectoriel de dimension 1.

(2) Supposons $\mathrm{Hom}_{\mathrm{MOD}_{L'/L}}(D_{k_1}, D_{k_2}) \neq 0$ et soit $\alpha : D_{k_1} \to D_{k_2}$ un tel morphisme non nul. On modifie le Frobenius sur $D_{k_1} \oplus D_{k_2}$ en posant $\varphi : D_{k_1} \oplus D_{k_2} \to D_{k_1} \oplus D_{k_2}$,

$$\varphi(e_1) = \varphi_{k_1}(e_1) + \varphi_{k_2}(\alpha(e_1)), \quad \varphi(e_2) = \varphi_{k_2}(e_2),$$

où $e_j \in D_{k_j}$ et φ_{k_j} est le Frobenius sur D_{k_j} avec $j \in \{1, 2\}$. Alors $p\varphi N = N\varphi$ où $N = N_{k_1} \oplus N_{k_2} : D_{k_1} \oplus D_{k_2} \to D_{k_1} \oplus D_{k_2}$. De plus, on a

$$(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D_{k_1} \oplus D_{k_2}) \in \mathrm{MOD}_{L'/L},$$

et

$$\mathrm{WD}(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D_{k_1} \oplus D_{k_2})^{\mathrm{ss}} = \mathrm{WD}(\varphi_{k_1} \oplus \varphi_{k_2}, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D_{k_1} \oplus D_{k_2})^{\mathrm{ss}}.$$

(3) Avec les notations dans (2), tout sous-objet D' de $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D_{k_1} \oplus D_{k_2})$ estde la forme :

$$(D_0 \oplus \cdots \oplus D_0(b'_1)) \oplus (D_0(l) \oplus \cdots \oplus D_0(l + b'_2))$$

avec $-1 \leq b'_1 \leq b_{k_1} - 1$, $-1 \leq b'_2 \leq b_{k_2} - 1$ vérifiant $b'_1 \leq l + b'_2$, où $b'_i = -1$ désigne $D' \cap D_{k_i} = 0$.

Démonstration. Immédiat. □

Motivé par les exemples 4.1 et le lemme 4.3 ci-dessus, on définit l'objet $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)$ de la manière suivante :

- en tant que $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-module, $D = \oplus_{i=1}^s D_i$;
- on définit $N = \oplus_{i=1}^s N_i$ sur D ;
- on définit l'action de $\mathrm{Gal}(L'/L)$ sur D naturellement ;
- pour tout $1 \leq k_1 < k_2 \leq s$:
  (a) si $k_1, k_2 \in H_i$ pour un i, on peut écrire

$$D_{k_1} = D_0 \oplus \cdots \oplus D_0(b_{k_1} - 1), \quad D_{k_2} = D_0(l) \oplus \cdots \oplus D_0(l + b_{k_2} - 1);$$

  avec $l \geq 0$ et $D_0 = \ker(N : D_{k_1} \to D_{k_1})$. Si de plus $l = 0$ ou $b_{k_1} = l + b_{k_2}$, et k_2 est le plus petit entier de H_i ayant l'une de ces propriétés, on pose (sur $D_{k_1} \oplus D_{k_2}$)

$$\varphi(e_1) = \varphi_{k_1}(e_1) + \varphi_{k_2}(\alpha(e_1)) \text{ si } e_1 \in D_{k_1}, \quad \varphi(e_2) = e_2 \text{ si } e_2 \in D_{k_2}$$

  où $\alpha \neq 0$ est un élément fixé de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{MOD}_{L'/L}}(D_{k_1}, D_{k_2})$.
  (b) sinon, on pose $\varphi = \varphi_{k_1} \oplus \varphi_{k_2}$ sur $D_{k_1} \oplus D_{k_2}$.

On déduit de la définition et du lemme 4.3 que $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D) \in \mathrm{MOD}_{L'/L}$ et

$$\mathrm{WD}(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)^{\mathrm{ss}} = (r, N, V).$$

4.2 Structure de D

On conserve les notations du paragraphe précédent. Dans ce paragraphe, on étudie la structure de D qui sera utilisée dans la suite.

D'abord, on suppose $D = D_{H_i}$ pour un $i \in \{1, \cdots, v\}$ de sorte qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} D &= D_1 \oplus \cdots \oplus D_s \\ &= \big(D_0 \oplus D_0(1) \oplus \cdots \oplus D_0(b_1 - 1)\big) \oplus \cdots \oplus \big(D_0(l_s) \oplus \cdots \oplus D_0(l_s + b_s - 1)\big) \end{aligned} \tag{4}$$

avec $l_s \geq l_{s-1} \geq \cdots \geq 0$ et D_0 absolument irréductible de dimension h.

On considère pour l'instant $(\varphi_1, N_1, \mathrm{Gal}(L'/L), D_1) \in \mathrm{MOD}_{L'/L}$. Par hypothèse, $(\varphi_1|_{D_0}, \mathrm{Gal}(L'/L), D_0)$ est un objet absolument irréductible dans $\mathrm{MOD}_{L'/L}$, donc d'après la remarque 2.1, $\varphi_1^{f'}|_{D_0} = a$ est scalaire avec $a \in K^\times$. Notons $\varphi' = \varphi^{f'}$ et $q' = p^{f'}$.

On peut aussi écrire D sous la forme (comme $(\varphi, \mathrm{Gal}(L'/L))$-module)

$$\begin{aligned} D &= D_{=0} \oplus \cdots \oplus D_{=n} \\ &= \big(\bigoplus D_0\big) \oplus \big(\bigoplus D_0(1)\big) \oplus \cdots \oplus \big(\bigoplus D_0(n)\big), \end{aligned}$$

où $n = \max_{2 \leq i \leq s}\{b_1 - 1, l_i + b_i - 1\}$. Alors par la définition de φ, on a pour tout $1 \leq j \leq n$:

$$D_{=j} = \{v \in D | \ (\varphi' - q'^j a)^k v = 0, k \gg 0\}.$$

On pose $D_{<j} = \oplus_{i<j} D_{=i}$ et $D_{\leq j} = \oplus_{i \leq j} D_{=i}$.

Définition 4.4. (1) Un sous-objet D' de D est dit *bon* s'il est de la forme (en tant que sous-espace relatif à la décomposition (4))

$$\begin{aligned} D' &= D'_1 \oplus \cdots \oplus D'_s \\ &= \big(D_0 \oplus D_0(1) \oplus \cdots \oplus D_0(b'_1)\big) \oplus \cdots \oplus \big(D_0(l_s) \oplus \cdots \oplus D_0(l_s + b'_s)\big) \end{aligned}$$

avec $-1 \leq b'_i \leq b_i - 1$, où $b'_i = -1$ désigne $D' \cap D_i = 0$.

(2) On appelle *drapeau* de D une suite de sous-$L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-modules libres $\{E_i\}_{1 \leq i \leq m}$ de D tels que

$$0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_m \subsetneq D.$$

Soit $\sigma : L \hookrightarrow K$ un plongement, on définit un drapeau de $D_{L',\sigma}$ de manière analogue.

(3) Un drapeau

$$\Delta : 0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_m \subsetneq D$$

de D est dit *bon* si tous les E_i sont bons.

Remarque 4.5. (1) L'ensemble des bons sous-objets de D est de cardinal fini.

(2) Si E_1 et E_2 sont deux bons sous-objets de D, alors $E_1 + E_2$, $E_1 \cap E_2$, $\ker(N|_{E_1})$ et $N(E_1)$ sont bons aussi. De plus, si $N|_{E_1} = 0$, alors pour tout j, $\ker((\varphi' - q'^j a)|_{E_1})$ et $(\varphi' - q'^j a)(E_1)$ sont bons.

(3) Si D est absolument indécomposable, ou $D = D_1 \oplus D_2$ avec

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{MOD}_{L'/L}}(D_1, D_2) \neq 0$$

et on dfinit φ comme dans le lemme 4.3 (2), alors tout sous-objet de D est bon.

Si on définit

$$D_{=j,k} = \{v \in D_{=j} | \ (\varphi' - q'^j a)^k v = 0\},$$

alors on obtient un bon drapeau de $D_{=j}$:

$$D_{=j,1} \subset D_{=j,2} \subset \cdots .$$

Dans le cas général $D = \oplus_{i=1}^v D_{H_i}$, on dit qu'un sous-objet D' est *bon* s'il est une somme directe de bons sous-objets de D_{H_i}.

4.3 Définition de la filtration sur D

On conserve les notations du paragraphe précédent. Soient $\sigma : L \hookrightarrow K$ un plongement et $\mathrm{Fil}_\sigma = (\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma})_i$ une filtration sur $D_{L',\sigma}$ stable par $\mathrm{Gal}(L'/L)$. On note $I(\mathrm{Fil}_\sigma, D)$ l'ensemble des entiers i tels que

$$\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma} / \mathrm{Fil}^{i+1} D_{L',\sigma} \neq 0.$$

Remarque 4.6. Si $D_1 \subset D_2$ sont deux sous-objets de D, alors $I(\mathrm{Fil}_\sigma, D_1) \subset I(\mathrm{Fil}_\sigma, D_2)$.

Définition 4.7. Soit D' un sous-objet de D et Fil_σ une filtration sur $D_{L',\sigma}$ avec $I(\mathrm{Fil}_\sigma) = \{i_{1,\sigma} < i_{2,\sigma} < \cdots < i_{d+1,\sigma}\}$. On dit que Fil_σ est *transverse* à D' si

$$I(\mathrm{Fil}_\sigma, D') = \{i_{1,\sigma}, \ldots, i_{\mathrm{dim} D',\sigma}\}.$$

Lemme 4.8. *Soit D' un sous-objet de D, et pour tout $\sigma : L \hookrightarrow K$ on se donne des entiers $\{i_{j,\sigma}\}_{1 \leq j \leq d+1}$ tels que $i_{1,\sigma} < \cdots < i_{d+1,\sigma}$. Alors il existe une filtration $\mathrm{Fil} = (\mathrm{Fil}_\sigma)_\sigma$ sur D stable par $\mathrm{Gal}(L'/L)$ telle que pour tout σ, on ait*

$$I(\mathrm{Fil}_\sigma, D) = \{i_{1,\sigma}, \ldots, i_{d+1,\sigma}\}$$

et Fil_σ est transverse à D'.

De plus, si $K_1 \subset K$ est un sous-corps de cardinal infini (par exemple $K_1 = \mathbb{Q}_p$), alors on peut prendre Fil_σ telle qu'elle soit définie sur K_1.

Démonstration. Voir [3], Proposition 3.2. □

Remarque 4.9. De plus, si on se donne un ensemble fini de sous-objets de D et des entiers $\{i_{1,\sigma} < \cdots < i_{d+1,\sigma}\}$, on obtient encore par la preuve du lemme 4.8 qu'il existe une filtration Fil telle que l'énoncé du lemme 4.8 soit vrai pour tous ces sous-objets.

On fixe une filtration $\mathrm{Fil} = (\mathrm{Fil}_\sigma)_\sigma$ sur D qui est transverse à tous les *bons* sous-objets (qui forment un ensemble fini). En particulier, pour E un bon sous-objet, on a (cf. la preuve de [3], Proposition 5.1)

$$t_H(E_{L'}) = [K:L]\sum_{j=1}^{\dim E}\sum_{\sigma} i_{j,\sigma}.$$

Corollaire 4.10. *Soient* $\{E_i\}_{0\leq i\leq m+1}$ *des bons sous-objets de* D *tels que* $E_0 = 0$, $E_{m+1} = D$ *et* $\dim E_i < \dim E_{i+1}$*, et* D' *un sous-objet quelconque de* D*. Posons*

$$a_i = \dim E_{i+1} - \dim E_i, \quad c_i = \dim(E_{i+1}\cap D') - \dim(E_i \cap D'),$$

et

$$\Omega = \{j \in \mathbb{N} |\ \text{il existe } 0 \leq l \leq m+1 \text{ tel que } \sum_{i=0}^{l} a_i - c_l + 1 \leq j \leq \sum_{i=0}^{l} a_i\}.$$

Alors

$$t_H(D'_{L'}) \leq [K:L]\sum_{j\in\Omega}\sum_{\sigma} i_{j,\sigma}.$$

Démonstration. Cela découle de la définition 4.7, de la remarque 4.6 et du choix de Fil. □

4.4 La preuve : cas spécial

Dans ce paragraphe, on va prouver l'implication "$(iii) \Rightarrow (ii)$" du théorème 2.12 dans le cas spécial $D = D_{H_i}$. Rappelons qu'on a défini un certain objet $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)$ (cf. §4.1) de $\mathrm{MOD}_{L'/L}$ tel que

$$\mathrm{WD}(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)^{\mathrm{ss}} = (r, N, V),$$

et on a fixée une filtration $\mathrm{Fil} = (\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma})_{i,\sigma}$ (cf. §4.3) sur $D_{L'}$ telle que

$$\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma}/\mathrm{Fil}^{i+1} D_{L',\sigma} \neq 0 \Leftrightarrow i \in \{i_{1,\sigma}, \ldots, i_{d+1,\sigma}\}$$

et pour tout *bon* sous-objet E de D

$$t_H(E_{L'}) = [K:L]\sum_{j=1}^{\dim E}\sum_{\sigma} i_{j,\sigma}.$$

Donc il suffit de prouver (supposé (iii) du théorème 2.12)

Théorème 4.11. *La filtration* Fil *sur* $D_{L'}$ *est admissible. Autrement dit, si* D' *est un sous-objet de* D*, alors*

$$t_H(D'_{L'}) \leq t_N(D').$$

On fixe un sous-objet D' de D et on commence par établir quelques propriétés de D'.

Définition 4.12. Soient E, E' deux bons sous-objets de D tels que $\mathrm{dim}E' > \mathrm{dim}E$, on définit

$$\alpha(E'/E, D') = \frac{\mathrm{dim}E' \cap D' - \mathrm{dim}E \cap D'}{\mathrm{dim}E' - \mathrm{dim}E}.$$

On note $\alpha(E'/E) = \alpha(E'/E, D')$ s'il n'y a pas de risque de confusion. On l'écrit $\alpha(E')$ si $E = 0$.

Remarque 4.13. (1) Le nombre $\alpha(E'/E)$ peut être négatif.

(2) Soient E_1, E_2, E_3 trois bons sous-objets de D tels que $\mathrm{dim}E_1 < \mathrm{dim}E_2 < \mathrm{dim}E_3$, alors ou bien $\alpha(E_3/E_2) > \alpha(E_3/E_1) > \alpha(E_2/E_1)$, ou bien $\alpha(E_2/E_1) > \alpha(E_3/E_1) > \alpha(E_3/E_2)$, ou bien $\alpha(E_2/E_1) = \alpha(E_3/E_1) = \alpha(E_3/E_2)$.

Théorème 4.14. *(1) Pour tout sous-objet D' de D, il existe un bon drapeau*

$$\Delta = \Delta_{D'} : 0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_m \subsetneq E_{m+1} = D$$

tel que

(a) pour tout $0 \leq i \leq m$, $N(E_{i+1}) \subseteq E_i$;

(b) pour tout $0 \leq i \leq m$, il existe j, $l \geq 0$ et une injection $E_{i+1}/E_i \to D_{=j,l+1}/D_{=j,l}$, c'est-à-dire, il existe j, $l \geq 0$ tels que $(\varphi' - q'^j a)E_{i+1} \subseteq E_i$ et

$$(\varphi' - q'^j a)^l v = 0 \Leftrightarrow v \in E_{i+1} \backslash E_i, \quad \text{si } v \in E_{i+1};$$

(c) pour $1 \leq i \leq m$, $\alpha(E_i/E_{i-1}) \geq \alpha(E_{i+1}/E_i)$; si $\alpha(E_{i+1}/E_i) = \alpha(E_i/E_{i-1})$, alors $\mathrm{dim}E_{i+1}/E_i \geq \mathrm{dim}E_i/E_{i-1}$;

(d) Soit E un bon sous-objet de D et $0 \leq i \leq m$ l'unique entier tel que

$$\mathrm{dim}E_i < \mathrm{dim}L \leq \mathrm{dim}E_{i+1},$$

alors $\alpha(E/E_i) \leq \alpha(E_{i+1}/E_i)$.

(2) Si

$$\Delta' = \Delta'_{D'} : 0 = E'_0 \subsetneq E'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E'_m \subsetneq E'_{m'+1} = D$$

est un autre bon drapeau vérifiant les propriétés (a)–(d), alors $m = m'$ et

$$\mathrm{dim}E_i = \mathrm{dim}E'_i, \quad \alpha(E_{i+1}/E_i) = \alpha(E'_{i+1}/E'_i)$$

pour tout $0 \leq i \leq m$.

Démonstration. (1) On munit $\mathbb{Q} \times \mathbb{N}$ de l'ordre total suivant :

$$(x_1, y_1) > (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 > x_2) \text{ ou } (x_1 = x_2 \text{ et } y_1 < y_2).$$

On considère l'ensemble des bons sous-objets non nuls de D et on choisit un d'entre eux, noté E_1, tel que le couple $(\alpha(E_1), \mathrm{dim}E_1)$ soit maximal. Puis on considère l'ensemble des bons sous-objets de D contenant E_1 strictement et on choisit un d'entre eux, noté E_2, tel que $(\alpha(E_2/E_1), \mathrm{dim}E_2/E_1)$ soit maximal. Comme cela, on obtient un bon drapeau

$$0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_m \subsetneq E_{m+1} = D.$$

On prouve maintenant que ce drapeau vérifie les conditions (a)-(d) :

(a) Supposons d'abord $i = 0$. Comme

$$\dim E_1 = \dim N(E_1) + \dim E_1^{N=0}$$

et

$$\dim(E_1 \cap D') \leq \dim N(E_1) \cap D' + \dim(E_1^{N=0} \cap D'),$$

on déduit que ou bien $\alpha(N(E_1)) \geq \alpha(E_1)$ ou bien $\alpha(E_1^{N=0}) \geq \alpha(E_1)$, la définition de E_1 impliqu'alors $N(E_1) = 0$ (puisque $N(E_1) \neq E_1$).

Pour i général, on définit $E'_{i+1} = \{v \in E_{i+1} |\ N(v) \in E_i\}$ qui contient E_i. On a une suite exacte de $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-modules libres

$$0 \to E'_{i+1}/E_i \to E_{i+1}/E_i \to (E_i + N(E_{i+1}))/E_i \to 0,$$

donc d'après le choix de E_i, on obtient

$$E'_{i+1} = E_i \text{ ou } E_{i+1},$$

or N est nilpotent sur E_{i+1}/E_i, on obtient $E'_{i+1} = E_{i+1}$, i.e., $N(E_{i+1}) \subseteq E_i$.

(b) Supposons d'abord $i = 0$. Comme (notons que $N = 0$ sur E_1 d'apràs (a))

$$E_1 = (E_1 \cap D_{=0}) \oplus \cdots \oplus (E_1 \cap D_{=n}),$$

et

$$D' \cap E_1 = (D' \cap (E_1 \cap D_{=0})) \oplus \cdots \oplus (D' \cap (E_1 \cap D_{=n})),$$

où $D' \cap (E_1 \cap D_{=j}) = (D' \cap E_1) \cap D_{=j}$ est le sous-espace de $D' \cap E_1$ formé par les vecteurs v tels que $(\varphi' - q'^j a)^k v = 0$ si $k \gg 0$. Le choix de E_1 implique $E_1 = E_1 \cap D_{=j}$ pour un j, i.e., $E_1 \subset D_{=j}$. En utilisant la suite exacte

$$0 \to \ker((\varphi' - q'^j a)|_{E_1}) \to E_1 \to (\varphi' - q'^j a)(E_1) \to 0,$$

le choix de E_1 force $(\varphi' - q'^j a)(E_1) = 0$ parce que $\ker(\varphi' - q'^j a)|_{E_1}$ et $(\varphi' - q'^j a)E_1$ sont bons d'après (a) (cf. la remarque 4.5), donc dans ce cas on pose $l = 1$. Dans le cas général, l'existence de j vient de la décomposition (notons que $N = 0$ sur E_{i+1}/E_i par (a))

$$E_{i+1}/E_i = (E_{i+1}/E_i)_{=1} \oplus \cdots \oplus (E_{i+1}/E_i)_{=n}$$

et d'un argument analogue comme dans (a). Pour définir l, on pose $E_i(k) = \ker(\varphi' - q'^j a)^k + E_i$ et on considère la filtration

$$E_i \subseteq E_i(1) \subseteq \cdots \subseteq E_i(k) \subseteq \cdots \subseteq E_{i+1}.$$

Comme $N = 0$ sur E_{i+1}/E_i et $\varphi'|_{E_{i+1}/E_i} = q'^j a$ est linéaire, on en déduit une décomposition

$$E_{i+1}/E_i \cong \bigoplus_k M_k$$

avec $M_k \cong E_i(k+1)/E_i(k)$, ensuite le choix de E_{i+1} implique $E_{i+1} = \pi^{-1}(M_l)$ pour un unique l, où $\pi : E_{i+1} \to E_{i+1}/E_i$ est la projection canonique.

(c) La première assertion est automatique de la définition du drapeau et de la remarque 4.13 (2). Pour la deuxième, on suppose $\alpha(E_{i+1}/E_i) = \alpha(E_i/E_{i-1})$. Définissons j (pour E_{i+1}/E_i) comme en (b). D'après (a) et (b), il y a deux cas :

– $N(E_{i+1}/E_{i-1}) \neq 0$ ou $(\varphi' - q'^j a)(E_{i+1}/E_{i-1}) \neq 0$. On peut supposer, sans perte de généralité, qu'on est dans le premier cas. On considère le morphisme N : $E_{i+1}/E_{i-1} \to E_i/E_{i-1}$ qui induit une suite exacte

$$0 \to \ker N \to E_{i+1}/E_{i-1} \to \operatorname{Im} N \to 0.$$

On a $0 \neq \operatorname{Im} N \subset E_i/E_{i-1} \subset \ker N \subset E_{i+1}/E_{i-1}$. D'après le choix de E_{i+1}, on obtient $\alpha(\ker N/E_i) \leq \alpha(E_{i+1}/E_i)$ et donc

$$\alpha(\ker N) \leq \alpha(E_{i+1}/E_{i-1})$$

et $\alpha(\ker N) = \alpha(E_{i+1}/E_{i-1})$ si et seulement si $\ker N = E_i/E_{i-1}$; d'autre part, le choix de E_i implique

$$\alpha(\operatorname{Im} N) \leq \alpha(E_i/E_{i-1}) = \alpha(E_{i+1}/E_{i-1})$$

et $\alpha(\operatorname{Im} N) = \alpha(E_{i+1}/E_{i-1})$ si et seulement si $\operatorname{Im} N = E_i/E_{i-1}$ Donc de la suite exacte, on déduit en fait

$$\operatorname{Im} N = E_i/E_{i-1} = \ker N,$$

i.e., N induit un isomorphisme $E_{i+1}/E_i \xrightarrow{\sim} E_i/E_{i-1}$, ce qui permet de conclure.

– $N = 0$ et $\varphi' = q'^j a$ sur E_{i+1}/E_{i-1}. Dans ce cas la suite exacte

$$0 \to E_i/E_{i-1} \to E_{i+1}/E_{i-1} \to E_{i+1}/E_i \to 0,$$

se scinde, et le choix de E_{j+1} permet de conclure.

(d) Supposons l'énoncé faux et E un tel sous-objet de D de dimension maximale. Soit i l'unique entier tel que $\dim E_i < \dim E \leq \dim E_{i+1}$. Alors par hypothèse, on a $i \geq 1$ et $\alpha(E/E_i) > \alpha(E_{i+1}/E_i)$.

Évidemment $E \neq D$. Soit j le plus petit entier tel que $E_{j+1} \not\subseteq E$, de sorte que $j \leq i$ et $E_j \subseteq L \cap E_{j+1}$. On pose $E' = E + E_{j+1}$ qui contient E strictement et soit i' l'unique entier tel que $\dim E_{i'} < \dim L' \leq \dim E_{i'+1}$ (alors $i' \geq i$). On va prouver

$$\alpha(E'/E_{i'}) > \alpha(E_{i'+1}/E_{i'})$$

et donc on obtiendra une contradiction avec le choix de E.

Notons que $E \cap E_{j+1}$ est bon et contient E_j, on a $\alpha(E_{j+1}/(E \cap E_{j+1})) \geq \alpha(E_{j+1}/E_j)$ par le choix de E_{j+1}, et donc par (c)

$$\alpha(E_{j+1}/(E \cap E_{j+1})) \geq \alpha(E_{i+1}/E_i).$$

D'autre part, on a $\alpha(E'/E) \geq \alpha(E_{j+1}/(E \cap E_{j+1}))$. Donc $\alpha(E'/E) \geq \alpha(E_{i+1}/E_i)$, et enfin on obtient $\alpha(E'/E_i) > \alpha(E_{i+1}/E_i)$ puisque par hypothèse $\alpha(E/E_i) > \alpha(E_{i+1}/E_i)$; ceci achève la preuve dans le cas $i' = i$. On est donc ramené au cas $i' > i$. Dans ce cas on a $\alpha(E'/E_i) > \alpha(E_{i+1}/E_i) \geq \alpha(E_{i'}/E_i)$, et ceci implique par (c)

$$\alpha(E'/E_{i'}) > \alpha(E_{i'}/E_i) \geq \alpha(E_{i'}/E_{i'-1}) \geq \alpha(E_{i'+1}/E_{i'}).$$

(2) On voit qu'il suffit de prouver que $\dim E_i = \dim E'_i$ pour tout i. Sinon, prenons i le plus petit entier tel que $\dim E_i \neq \dim E'_i$, par conséquent, on a $\dim E_{i-1} = E'_{i-1}$

et on voit aussi $\alpha(E_{i-1}) = \alpha(E'_{i-1})$ et un argument facile en utilisant (d) entraîne $\alpha(E_i/E_{i-1}) = \alpha(E'_i/E'_{i-1})$. On peut supposer $\dim E_i > \dim E'_i$. Comme

$$\alpha((E_{i-1}+E'_1)/E_{i-1}) \geq \alpha(E'_1/E_{i-1}\cap E'_1) \geq \alpha(E'_1) \geq \alpha(E'_i/E'_{i-1}) = \alpha(E_i/E_{i-1}),$$

le choix de E_i implique
- ou bien $E_{i-1}+E'_1 = E_{i-1}$, i.e., $E'_1 \subset E_{i-1}$;
- ou bien $E_{i-1}+E'_1 = E_i$, ensuite on obtient $\alpha(E'_1) = \alpha(E'_i/E'_{i-1})$ et

$$\dim E'_1 \geq \dim E_i/E_{i-1} > \dim E'_i/E'_{i-1})$$

qui donne une contradiction puisque d'après (c) on a $\dim E'_1 \leq \dim(E'_i/E'_{i-1})$.

Par récurrence, on a $E'_{i-1} \subset E_{i-1}$, donc une contradiction avec le choix de E_i. □

Remarque 4.15. La preuve n'utilise pas la définition de φ, donc le théorème reste vrai pour tout $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D) \in \mathrm{MOD}_{L'/L}$,.

On fixe un bon drapeau de D

$$\Delta = \Delta_{D'} : 0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_{m+1} = D$$

comme dans le théorème 4.14.

Rappelons qu'on a fixé un sous-objet D' de D. On suppose de plus que D' est *non-trivial*, i.e. $D' \neq 0$ et $D' \neq D$. D'après (2) du théorème 4.14, il existe k et k' (indépendants du choix du drapeau) tels que
- $E_{k'}$ est le plus grand bon sous-objet tel que $\alpha(E_{k'}) = 1$;
- $E_{k'+k}$ est le plus petit bon sous-objet contenant D'.

On a forcément $k' \neq 0$ et $k'+k \neq m+1$. Le drapeau donc s'écrit sous la forme

$$0 = E_0 \subsetneq E_{k'} = F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_{k'+k} = F_{k+1} \subsetneq D.$$

On pose $a_0 = \dim F_1$, $a_{k+1} = \dim D - \dim F_{k+1}$, et pour $1 \leq i \leq k$

$$a_i = \dim F_{i+1}/F_i, \quad c_i = \dim D'\cap F_{i+1}/D'\cap F_i.$$

Proposition 4.16. *Avec les notations plus haut, on a*

$$a_0 \geq \max\{c_i\}_{1\leq i\leq k}, \quad a_{k+1} \geq \max\{a_i - c_i\}_{1\leq i\leq k}.$$

Démonstration. On prouve seulement la première inégalité, la preuve de l'autre étant analogue. D'après (1) du lemme 4.17 ci-dessous, on peut supposer $h = \dim D_0 = 1$.

Choisissons un r tel que $c_r = \max_{1\leq i\leq k}\{c_i\}$. On sait qu'il existe j, $l \geq 0$ tels que $F_{r+1}/F_r \hookrightarrow D_{=j,l+1}/D_{=j,l}$ d'après le théorème 4.16 (b). On a donc $\dim D'\cap D_{=j,l+1} - \dim D'\cap D_{=j,l} \geq c_r$, et puis $\dim D'\cap D_{=j,1} \geq c_r$ parce que l'on a un homomorphisme injectif

$$(\varphi' - q'^j a)^l : D_{=j,l+1}/D_{=j,l} \to D_{=j,1}.$$

On peut supposer $j \geq 1$ (le cas $j = 0$ est trivial), alors d'après le lemme 4.17 ci-dessous, on a pour tout $1 \leq j' \leq j$,

$$\dim D'\cap D_{=j'-1,1} \geq \dim D'\cap D_{=j',1} - 1,$$

et pour que $\dim D'\cap D_{=j'-1,1} = \dim D'\cap D_{=j',1}-1$, il faut $\dim D_{=j'-1,1} = \dim D_{=j',1}-1$, d'où

$$\dim\ker(N|_{D_{=j',1}}) = 1 \ \text{ et } \ \ker(N|_{D_{=j',1}}) \subset D'.$$

S'il en est ainsi, alors par la définition de F_1 on déduit (car $\ker(N|_{D_{=j',1}})$ est un sous-objet de D')

$$\ker(N|_{D_{=j',1}}) \subset F_1,$$

et ceci permet de conclure puisque $\dim D'\cap D_{=0,1} \leq 1$ d'après le lemme 4.17. □

Lemme 4.17. *(1) Pour tout sous-objet $\overline{D}$ de D, on a $h|\dim\overline{D}$.*

(2) Pour tout j, $\dim\ker N\cap\ker(\varphi' - q'^j a) = h$ ou 0.

(3) $\dim D_{=0,1} = h$, et $|\dim D_{=j,1} - \dim D_{=j-1,1}| = h$ ou 0 pour $1\leq j\leq n$.

Démonstration. (1) Comme $\overline{D} = \bigoplus_{j=0}^{n}\overline{D}\cap D_{=j}$ en tant que $(\varphi, \mathrm{Gal}(L'/L))$-module, on peut supposer $N = 0$ et alors par définition, $(\varphi, \mathrm{Gal}(L'/L), D)$ est une extension successive d'objets absolument irréductibles de type $(\varphi|_{D_0}, \mathrm{Gal}(L'/L),$
$D_0)$ qui est absolument irréductible. L'énoncé s'en déduit.

(2) Cela résulte de la définition de φ et de (1).

(3) Le premier énoncé est une conséquence directe de (2). Pour le deuxième, on considère $N(D_{=j,1})$. D'une part, on a $\dim D_{=j,1} - \dim N(D_{=j,1}) \leq h$ d'après (2). D'autre part, $\dim D_{=j-1,1} - \dim N(D_{=j,1}) \leq h$ d'après la définition de φ. Enfin, l'assertion (i) nous permet de conclure. □

En vue du théorème 4.14 et de la proposition 4.16, on pose la définition suivante :

Définition 4.18. Soient $\alpha = (a_0, \ldots, a_{k+1})$ une partition de $d+1$ et Ω un sous-ensemble de $\{1, \ldots, d+1\}$. Posons

$$I_0 = \{1, 2, \ldots, a_0\}, I_1 = \{a_0+1, \ldots, a_0+a_1\}, \cdots, I_{k+1} = \{a_0+\cdots+a_k+1, \ldots, d+1\},$$

et $c_i = |\Omega\cap I_i|$ pour $0\leq i\leq k+1$. On dit que la paire (Ω, α) est de type *spécial* si les nombres $\{a_i\}_{0\leq i\leq k+1}$ et $\{c_i\}_{0\leq i\leq k+1}$ vérifient les conditions suivantes :

(i) $a_0 = c_0 > 0$, $c_{k+1} = 0$, et $a_i \geq c_i > 0$ pour $1\leq i\leq k$,

(ii) $\frac{c_i}{a_i} \geq \frac{c_{i+1}}{a_{i+1}}$ pour tout $0\leq i\leq k$,

(iii) $a_0 \geq \max_{1\leq i\leq k}\{c_i\}$, $a_{k+1} \geq \max_{1\leq i\leq k}\{a_i - c_i\}$.

Les paires de types spéciaux ont la propriété :

Proposition 4.19. *Soient (Ω, α) une paire de type spécial, et $\{m_j\}_{1\leq j\leq d+1}$, $\{n_j\}_{1\leq j\leq d+1}$ des nombres réels tels que*

(a) $m_j \leq m_{j+1}$, $n_j\leq n_{j+1}$ pour tout $1\leq j\leq d$,

(b) $m_{j+1} - m_j \geq n_{j+1} - n_j$ pour tout $1\leq j\leq d$,

(c) $\sum\limits_{j=1}^{d+1} m_j \leq \sum\limits_{j=1}^{d+1} n_j$.

Alors on a $\sum\limits_{j\in\Omega} m_j \leq \sum\limits_{j\in\Omega} n_j$.

Remarque 4.20. Cette proposition peut être vue comme une généralisation de [3], lemme 5.4.

La démonstration du théorème 4.11 utilise la proposition 4.19, dont la preuve sera donnée au §4.5.

Démonstration de 4.11. Reprenons les notations de la proposition 4.16, en particulier on a $\sum_{i=0}^{k+1} a_i = d+1$. Notons $\alpha = (a_0, \ldots, a_{k+1})$ la partition de $d+1$,

$$I_0 = \{1, \ldots, a_0\}, \cdots, I_{k+1} = \{a_0 + \cdots + a_k + 1, \ldots, d+1\},$$

et Ω le sous-ensemble de $\{1, \ldots, d+1\}$ tel que

$$\Omega \cap I_i = \{\sum_{j=0}^{i} a_j - c_i + 1, \sum_{j=0}^{i} a_j - c_i + 2, \ldots, \sum_{j=0}^{i} a_j\}.$$

On sait que, d'après le théorème 4.14 et la proposition 4.16, (Ω, α) est de type spécial.

On pose pour $0 \leq i \leq n$, $s_i = \dim(D' \cap D_{=i})$, $r_i = \sharp\{j \in \Omega | \ \dim D_{<i} + 1 \leq j \leq \dim D_{\leq i}\}$, et pour $1 \leq j \leq d+1$,

$$n_j = \begin{cases} t_N(D_0) & 1 \leq j \leq \dim D_{=0} \\ t_N(D_0(1)) & \dim D_{=0} + 1 \leq j \leq \dim D_{\leq 1} \\ \vdots & \vdots \\ t_N(D_0(n)) & \dim D_{<n} + 1 \leq j \leq \dim D_{\leq n} = d+1 \end{cases}$$

de sorte qu'on a (notons que $t_N(D_0(i)) = t_N(D_0) + i[K:\mathbb{Q}_p]$)

$$t_N(D') = \sum_{i=0}^{n} s_i t_N(D_0(i)) = \dim D' \cdot t_N(D_0) + [K:\mathbb{Q}_p] \sum_{i=0}^{n} i s_i,$$

et

$$\sum_{j \in \Omega} n_j = \sum_{i=0}^{n} r_i t_N(D_0(i)) = \dim D' \cdot t_N(D_0) + [K:\mathbb{Q}_p] \sum_{i=0}^{n} i r_i.$$

(a) D'abord, on prouve le théorème sous l'hypothèse $\sum_{i=0}^{l} s_i \leq \sum_{i=0}^{l} r_i$ pour tout $0 \leq l \leq n$. Alors on a :

- $t_H(D'_{L'}) \leq [K:L] \sum_{j \in \Omega} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma}$. Ceci est une conséquence du corollaire 4.10.
- $[K:L] \sum_{j \in \Omega} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma} \leq \sum_{j \in \Omega} n_j$. En posant $m_j = [K:L] \sum_{\sigma} i_{j,\sigma}$, on voit que

  $$m_{j+1} - m_j \geq [K:\mathbb{Q}_p] \geq n_{j+1} - n_j$$

  puisque que $\dim D_{=i} \neq 0$ pour tout $0 \leq i \leq n$. On déduit l'énoncé de la proposition 4.19 parce que l'on a supposé que

  $$t_H(D_L) = \sum_{j=1}^{d+1} m_j = \sum_{j=1}^{d+1} n_j = t_N(D).$$

– $\sum_{j\in\Omega} n_j \leq t_N(D')$. Il suffit de prouver que $\sum_{i=0}^n i(s_i-r_i)\geq 0$. Mais

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n i(s_i-r_i) &= n\sum_{i=0}^n(s_i-r_i)-\sum_{i=0}^n(n-i)(s_i-r_i)\\ &= n\sum_{i=0}^n(s_i-r_i)-\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{l}(s_i-r_i),\end{aligned}$$

l'inégalité voulée résulte donc du fait que $\sum_{i=0}^n s_i=\sum_{i=0}^n r_i=\mathrm{dim}D'$ et de l'hypothèse $\sum_{i=0}^{l}(s_i-r_i)\leq 0$.

Donc on obtient $t_H(D'_{L'})\leq t_N(D')$.

(b) Dans le cas général, on voit facilement qu'il suffit de trouver un autre sous-ensemble Ω' de $\{1,\ldots,d+1\}$ tel que

– $t_H(D'_{L'})\leq [K:L]\sum_{j\in\Omega'}\sum_{\sigma} i_{j,\sigma}$;
– (Ω',α) est de type spécial et $|\Omega'\cap I_i|=|\Omega\cap I_i|=c_i$;
– pour tout $0\leq l\leq n$

$$\mathrm{dim}(D'\cap D_{\leq l})\leq \sharp\{j\in\Omega'|j\leq \mathrm{dim}D_{\leq l}\}. \tag{5}$$

Si $0\leq l\leq n$, on note $i(l)$ l'unique entier tel que $\mathrm{dim}F_{i(l)}<\mathrm{dim}D_{\leq l}\leq \mathrm{dim}F_{i(l)+1}$. D'abord, soit l_1 le plus petit entier tel que

$$\mathrm{dim}(D'\cap D_{\leq l_1})>\sharp\{j\in\Omega|j\leq \mathrm{dim}D_{\leq l_1}\}.$$

Si on pose

$$x_{l_1}=\mathrm{dim}D'\cap D_{\leq l_1}-\mathrm{dim}D'\cap F_{i(l_1)}$$

alors on a $x_{l_1}>0$. On définit un sous-ensemble Ω'_1 de $\{1,\ldots,d+1\}$, en modifiant la définition de Ω, tel que $\Omega'_1\cap I_j=\Omega\cap I_j$ pour $j\neq i(l_1)$ et

$$\begin{aligned}\Omega'_1\cap I_{i(l_1)} &= \{\mathrm{dim}D_{\leq l_1}-x_{l_1}+1,\ldots,\mathrm{dim}D_{\leq l_1}\}\sqcup\\ &\quad\ \{\mathrm{dim}F_{i(l_1)+1}-(c_{i(l_1)}-x_{l_1})+1,\ldots,\mathrm{dim}F_{i(l_1)+1}\}.\end{aligned}$$

Notons que $c_{i(l_1)}-x_{l_1}>0$ d'après l'hypothèse sur l_1 et le théorème 4.14, (1). Après, si Ω'_1 vérifie (5), on pose $\Omega'=\Omega'_1$; sinon, soit l_2 le plus petit entier tel que (5) soit faux pour Ω'_1, alors $l_2>l_1$. Il y a deux possibilités :

– si $i(l_2)>i(l_1)$, on pose

$$x_{l_2}=\mathrm{dim}D'\cap D_{\leq l_2}-\mathrm{dim}D'\cap F_{i(l_2)},$$

l'hypothèse sur l_2 implique que $x_{l_2}>0$; on définit Ω'_2 comme précédemment ;

– si $i(l_1)=i(l_2)$, on pose

$$x_{l_2}=\mathrm{dim}D'\cap D_{\leq l_2}-\mathrm{dim}D'\cap D_{\leq l_1},$$

de sort que $x_{l_2}>0$; on définit Ω'_2 en modifiant la définition de Ω'_1 par

$$\begin{aligned}&\Omega'_2\cap\{\mathrm{dim}D_{\leq l_1}+1,\ldots,\mathrm{dim}F_{i(l_1)+1}\}\\ =\ &\{\mathrm{dim}D_{\leq l_2}-x_{l_2}+1,\ldots,\mathrm{dim}D_{\leq l_2}\}\sqcup\\ &\{\mathrm{dim}F_{i(l_1)+1}-(c_{i(l_1)}-x_{l_1}-x_{l_2})+1,\ldots,\mathrm{dim}F_{i(l_1)+1}\}.\end{aligned}$$

Par récurrence on obtient bien un sous-ensemble Ω' de $\{1,\dots,d+1\}$ vérifiant les conditions demandées : les deux dernières résultent de la définition et la première résulte encore du corollaire 4.10 puisque $D_{\leq i}$ est aussi un bon sous-objet de D. $\square$

4.5 Preuve de 4.19

Dans ce paragraphe, on prouve la proposition 4.19. On commence par un lemme :

Lemme 4.21. *Soient $k\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ et $\{a_i\}_{0\leq i\leq k+1}$, $\{c_i\}_{0\leq i\leq k+1}$ des nombres réels vérifiant les conditions (i)-(iii) de la définition 4.18, alors il existe des nombres réels $\{t_i\}_{1\leq i\leq k}$ tels que*

(i)' $\frac{t_1}{a_0}=\frac{t_2}{c_1}=\cdots=\frac{t_k}{c_{k-1}}=: r$,

(ii)' pour tout $1\leq l\leq k$,

$$\sum_{i=1}^{l}t_i\geq\sum_{i=1}^{l}(a_i-c_i),$$

(iii)' $\sum\limits_{i=1}^{k}t_i-\sum\limits_{i=1}^{k}(a_i-c_i)+rc_k\leq a_{k+1}$.

Démonstration. On peut écrire, si les t_i existent, $t_i=t_1c_{i-1}/a_0$ pour $1\leq i\leq k$, et alors (ii)' se traduit à

$$t_1(1+\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{l-1}c_i)\geq\sum_{i=1}^{l}(a_i-c_i),$$

et (iii)' se traduit à

$$t_1(1+\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{k}c_i)\leq a_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}(a_i-c_i).$$

On prend $t_1=\max_{1\leq l\leq k}\{(1+\frac{1}{a_0}\sum\limits_{i=1}^{l-1}c_i)^{-1}\sum\limits_{i=1}^{l}(a_i-c_i)\}$ et $t_i=t_1c_{i-1}/a_0$, alors (i)', (ii)' sont satisfaits. Pour voir que les t_i ainsi définis satisfont à (iii)', il suffit de vérifier que pour $1\leq l\leq k$,

$$(\sum_{i=1}^{l}(a_i-c_i))(1+\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{k}c_i)\leq(1+\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{l-1}c_i)(a_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}(a_i-c_i)),$$

qui est une conséquence facile des (ii) et (iii) de la définition 4.18. $\square$

Dans la suite de cet article, si on se donne des $\{a_i\}_{0\leq i\leq k+1}$ et $\{c_i\}_{0\leq i\leq k+1}$ comme dans le lemme 4.21, on prendra les $\{t_i\}_{1\leq i\leq k}$ et r comme dans ce lemme tels que r est le plus petit possible.

Démonstration de 4.19. Grâce à la condition (b) : $m_{j+1}-m_j\geq n_{j+1}-n_j$, on voit qu'on peut supposer

$$\Omega=\{1\leq j\leq d+1|\text{ il existe }0\leq l\leq n\text{ tel que }\sum_{i=0}^{l}a_i-c_l+1\leq j\leq\sum_{i=0}^{l}a_i\}.$$

Posons $I=[0,d+1[$. On prend deux fonctions lisses $f,g:I\to\mathbb{R}$ telles que (toujours possible)

– $f'(x) \geq g'(x) \geq 0$, et $\int_I f \leq \int_I g$, et
– pour $0 \leq j \leq d$, $f(j) = m_{j+1}$, $g(j) = n_{j+1}$.

Le lemme ci-dessus nous permet de définir des nombres $\{t_i\}_{1\leq i\leq k}$ vérifiant les conditions (i)'-(iii)' du lemme 4.21. Posons

$$J_i = \begin{cases} [0, a_0[& \text{si } i = 0 \\ [\sum_{j=0}^{i} a_j - c_i, \sum_{j=0}^{i} a_j[& \text{si } 1 \leq i \leq k \\ \emptyset & \text{si } i = k+1, \end{cases}$$

et

$$J_i' = \begin{cases} [0, a_0[& \text{si } i = 0 \\ [a_0 + \sum_{j=1}^{i-1}(t_j + c_j) + t_i, a_0 + \sum_{j=1}^{i}(t_j + c_j)[& \text{si } 1 \leq i \leq k \\ \emptyset & \text{si } i = k+1. \end{cases}$$

Alors on a $|J_i| = |J_i'| = c_i$, $\bigsqcup_{1\leq i\leq k} J_i' \subset I$ et

$$\sum_{j\in\Omega}(m_j - n_j) \leq \sum_{i=0}^{k}\int_{J_i}(f-g) \leq \sum_{i=0}^{k}\int_{J_i'}(f-g) \leq \frac{1}{r+1}\int_I (f-g) \leq 0,$$

où la deuxième inégalité résulte de la condition (ii)' du lemme 4.21. Ceci permet de conclure. □

4.6 Le cas général

On considère le cas général : $D = \bigoplus_{i=1}^{v} D_{H_i}$. D'abord, la proposition 4.19 se généralise aisément :

Proposition 4.22. *Soit $\alpha = (d_1, \ldots, d_v)$ une partition de $d+1$, et pour tout $1 \leq i \leq v$ soient α_i une partition de d_i et Ω_i un sous-ensemble de $\{1, \ldots, d_i\}$ tels que la paire (Ω_i, α_i) est de type spécial. On associe, à chaque paire (Ω_i, α_i), le nombre réel positif r_i comme dans le lemme 4.21, et on suppose $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_v$. Posons*

$$\Omega_i' = \{d_1 + \cdots d_{i-1} + l |\ l \in \Omega_i\}, \quad \Omega = \bigsqcup_i \Omega_i'$$

de sorte que Ω est un sous-ensemble de $\{1, \ldots, d+1\}$. Soient $\{m_j\}_{1\leq j\leq d+1}$ et $\{n_j\}_{1\leq j\leq d+1}$ des nombres réels vérifiant les conditions (a)-(c) de la proposition 4.19, alors on a $\sum_{j\in\Omega} m_j \leq \sum_{j\in\Omega} n_j$.

La preuve de cette proposition est analogue à celle de 4.19 et on laisse les détails au lecteur.

Maintenant, posons $d_i = \dim D_{H_i}$, et $D_i' = D' \cap D_{H_i}$ pour tout $1 \leq i \leq v$, où D' est le sous-objet fixé de D. Comme D_i' est un sous-objet de D_{H_i}, on peut lui associer un drapeau $\Delta_i = \Delta_{D_i'}$ d'après le théorème 4.14, et puis un sous-ensemble Ω_i de $\{1, \ldots, d_i\}$ et un nombre réel positif r_i comme dans le lemme 4.21. On peut supposer $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_v$. Posons

$$\Omega_i' = \{d_1 + \cdots d_{i-1} + l |\ l \in \Omega_i\} \text{ et } \Omega = \bigsqcup_i \Omega_i'.$$

On a alors $t_H(D') \leq \sum_{j\in\Omega}\sum_{\sigma} i_{j,\sigma}$ par le corollaire 4.10. Un argument analogue à la preuve du théorème 4.11, en utilisant la proposition 4.22 ci-dessus, nous permet de conclure dans le cas général.

Références

[1] L. Berger & C. Breuil, *Sur quelques représentations potentiellement cristallines de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, à paraître dans Astérisque.

[2] C. Breuil & A. Mézard, *Multiplicités modulaires et représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ *et de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ *en* $\ell = p$, Duke Math. J. 115 (2002), 205-310.

[3] C. Breuil & P. Schneider, *First steps towards p-adic Langlands functoriality*, J. Reine Angew. Math. 610 (2007), 149-180.

[4] W. Casselman, *Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups*, prépublication, 1995.

[5] L. Clozel, *Motifs et formes automorphes : applications du principe de functorialité*, Perspectives in Math. 10, Academic Press, 1990, 77-159.

[6] P. Colmez, *Une correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations semi-stables de dimension 2*, prépublication, 2006.

[7] P. Deligne, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L*, Lecture Notes in Math. 349, Springer-Verlag, 1973, 501-597.

[8] M. Emerton, *Locally analytic vectors in representations of locally p-adic analytic groups*, à paraître dans Memoirs of the AMS.

[9] M. Emerton, *p-adic L-functions and unitary completions of representations of p-adic reductive groups*, Duke Math. J. 130 (2005), no. 2, 353-392.

[10] M. Emerton, *Jacquet modules of locally analytic representations of p-adic reductive groups I. Construction and first properties*, Ann. Sci. E. N. S. 39 (2006), no. 5, 775-839.

[11] J.-M. Fontaine, *Représentations p-adiques semi-stables*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 113-184.

[12] J.-M. Fontaine, *Représentations l-adiques potentiellement semi-stables*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 321-347.

[13] S. Kudla, *The local Langlands correspondence : the non-Archimedean case*, Proc. Symp. Pure Math. 55, Amer. Math. Soc., 1994, 365-410.

[14] P. Schneider & J. Teitelbaum, *Banach-Hecke algebras and p-adic Galois representations*, Docum. Math., The Book Series 4 (J. Coates' Sixtieth Birthday), 2006, 631-684.

[15] M.-F. Vignéras, *Représentations l-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec* $l \neq p$, Prog. in Math., vol. 137, Birkhäuser, 1996.

[16] A. Zelevinsky, *Induced representations of reductive p-adic groups II*, Ann. Sci. E. N. S. 13 (1980), 165-210.

Département de Mathématiques, bâtiment 425, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France

E-mail : yongquan.hu@math.u-psud.fr