Analyse Complexe TD 5 (13/03 - 16/03)

Exercice 1 Des résidus, I.

1. Calculer
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$$
avec de l'analyse complexe.
2. En utilisant le contour utilisé en cours pour les intégrales contenant un log, trouver une méthode pour calculer
$$\int_a^{+\infty} \frac{P}{Q}$$
où P, Q sont deux polynômes, en supposant que l'intégrale converge absolument.
3. Appliquer cette méthode à $P = 1$, $Q = z^2 + 6z + 8$, $a = 0$.

Exercice 2 Des résidus, II. Vérifiez que vous savez calculer les intégrales suivantes, théoriquement ... et pratiquement :

1. Si R est une fraction rationnelle, $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\mathrm{d}t$. Passez à la pratique avec $R(x, y) = a/(a^2 + y^2)$ et $R(x, y) = 1/(a + x)^2$.
2. $$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x^2 + a^2}, \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2}, \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\imath \pi x \xi}}{(1 + x^2)^2}, \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + x^2)^{n+1}}, \quad \int_{\mathbb{R}+} \frac{\log x}{x^2 + a^2}.$$
3. $\int_0^{+\infty} x^p/(1 + x^n)\mathrm{d}x$ (pensez à un secteur d'angle bien choisi).
4. $\int_0^1 P(x)/Q(x)\mathrm{d}x$ (pensez à $\log[1 - 1/x]$), où P et Q sont des polynômes.
5. Et finalement, $\int_0^1 \log(\sin \pi x)$, en utilisant un contour en forme de U.

Exercice 3 Beaucoup de Résidus !

1. Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ telle que les pôles de f ne sont pas des entiers et sont en nombre finis. Supposons que $\sum_{\mathbb{Z}} |f(n)| < +\infty$, et que sur le bord du carré de sommets $(N + 1/2)(\pm\imath \pm 1)$,
$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^k}$$
où $k > 1$. Alors montrer que
$$\sum_{\mathbb{Z}} f(n) = -\sum_{y \in \mathbb{C}} Res_y(f(z)\mathrm{d}z)\pi cot(\pi y).$$
2. En déduire que
$$\sum_{\mathbb{Z}} \frac{1}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{a} \coth \pi a.$$
3. Trouver un méthode similaire pour calculer des sommes de la forme $\sum(-1)^n f(n)$ sous les mêmes hypothèses. En déduire
$$\sum_{\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{(a + n)^2} = \frac{\pi^2 \cos \pi a}{\sin^2 \pi a}.$$

Exercice 4 Calculer l'intégrale
$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2/3}}{(x + 1)^2(x + 2)} dx.$$
C'était un exercice du partiel de l'année dernière.

Exercice 5 *Factorisation de Weierstrass pour les fonctions d'ordre fini.* Cet exercice reproduit un autre des exercices du partiel de l'année dernière.

1. «On rappelle que le facteur principal de Weierstrass est la fonction

$$W_n(z) = (1-z)\exp\left\{\sum_{j=1}^{n-1} z^j\right\}.$$

Soit f une fonction entière d'ordre $\rho \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire telle que pour tout $\varepsilon > 0$, on ait $|f(z)| = O(\exp(|z|^{\rho+\varepsilon}))$ quand $|z| \to \infty$ (et ρ est le plus petit réel ayant cette propriété). On énumère les zéros non nuls de f en une suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$, en répétant chaque zéro suivant sa multiplicité, et on suppose donné $\beta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{|a_j|^\beta} \text{ converge.} \tag{$*$}$$

(Le lemme de Jensen implique que cette condition est satisfaite dès que $\beta > \rho$). Montrer le théorème de factorisation de Hadamard :

$$f(z) = e^{g(z)} z^k \prod_{j=0}^{\infty} W_n\left(\frac{z}{a_j}\right),$$

où $k \in \mathbb{N}$, n est le plus petit entier supérieur ou égal à β, et $g \in \mathbb{C}[X]$ a un degré satisfaisant $\deg g \leq \sup(\beta, \rho)$. (On pourra établir des minorations de $|W_n(z)|$ sur les régions $|z| \leq 1/2$ et $|z| \geq 2$).»

Indications

1. Ce n'est pas nécessaire pour le résultat, mais commencez par montrer qu'effectivement, la somme $(*)$ converge dès que $\beta > \rho$. Le lemme de Jensen était appelé formule de Jensen dans le TD4.
2. Ensuite, montrez que le résultat est valable quand la fonction f n'a pas de zéros.
3. Il vous reste à montrer que le produit infini converge, c'est la partie délicate.
4. Si f n'a qu'un nombre fini de zéros, on peut décider par convention que $a_j = \infty$ à partir d'un certain rang.

2. Une bonne partie des formules de produit infini pour les fonctions usuelles sont obtenues à partir de cette factorisation. Retrouvez par exemple celle du sinus, ou celle de la fonction $1/\Gamma$.