Analyse Complexe TD 2 (20/02 – 23/02)

Exercice 1 Écrire l'intégrale de chemin sur un rectangle et sur un cercle en forme paramétrée.

Exercice 2 Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que la fonction $x \mapsto x^\alpha$ définie sur $]0, +\infty[$ se prolonge de façon unique en une fonction holomorphe f_α sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$. Déterminer le développement en série de f_α autour de 1 et la dérivée de f_α. Pour quels α peut-on prolonger f_α à $\mathbb{C}^\times$, à $\mathbb{C}$?

Exercice 3 Complétez votre cours en prouvant :

1. *L'effacement des singularités.* Soit f une fonction holomorphe et bornée sur $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{D}$.
2. *Le théorème de Morera.* Soit f une fonction continue sur U telle que son intégrale de chemin le long de tout triangle inclus dans U est nulle. Montrer que f est holomorphe. (Penser à trouver F telle que $dF = f(z)dz$).
3. Soit f une fonction holomorphe sur un domaine symétrique par rapport à l'axe réel, qui est réelle sur l'axe réel. Trouver une relation entre $f(z)$ et $f(\overline{z})$. Ceci doit vous aider pour la question suivante.
4. *Le Principe de réflexion de Schwarz (faible).* Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ symétrique par rapport à l'axe réel. Soit $U_+ = \{z \in U \ \Im z \geq 0\}$ et $U_- = \{z \in U \ \Im z \leq 0\}$. Soit $f \in C^0(U_+) \cap \mathcal{O}(\mathring{U}_+)$. On suppose que f est réelle sur $\mathbb{R} \cap U_+$. Montrer que f a un prolongement holomorphe à U, en en donnant une formule.

Exercice 4 Montrer que $f \mapsto f'(0)$ est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{O}(\mathbb{D}), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 5 Autour de la formule de Cauchy.

1. Soit g une fonction C^1 sur le cercle. Pour $z \in \mathbb{D}$, on pose :
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{S}^1} \frac{g(w)}{w - z} \mathrm{d}w.$$
Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. Identifier les valeurs de f sur le bord.
2. Soit K un compact à bord, et $U = \mathring{K}$. Soit $f \in \mathcal{O}(U)$, continue sur K. Montrer que la formule de Cauchy est valable pour ∂K :
$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{z - w} dw \text{ pour } z \in U.$$
3. * Soit f une fonction continue sur le disque fermé, holomorphe sur le disque ouvert. On suppose que tous les coefficients dans le développement en série de f en zéro sont des entiers. Montrer que f est un polynôme.
4. ** Soit U un ouvert connexe. On définit l'opérateur suivant sur l'espace $C_c(U)$ des fonctions continues sur U à support compact dans U :
$$Tf(z) = \frac{1}{\pi} \int_U \frac{f(w)}{z - w} |\mathrm{d}w|^2.$$
Vérifiez que cet opérateur est bien défini pour des f continues. Montrer que si f est C^n, alors Tf est aussi C^n, pour $n \geq 0$. Si f est C^1, montrer que $\partial(Tf)/\partial\overline{z} = f$. Si f n'est pas C^1, montrer que c'est encore vrai au sens des distributions sur U. Montrer aussi que Tf est C^∞ en dehors du support de f.

Exercice 6

1. Montrer que si f est holomorphe sur $\mathbb{D}$, f admet une primitive holomorphe sur $\mathbb{D}$.
2. Soit f une fonction holomorphe sur un disque $D(z_0, R)$. On suppose que f ne s'annule pas. Montrer qu'il existe g holomorphe sur le disque telle que $f = e^g$.

Exercice 7 Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ une fonction holomorphe injective sur un ouvert U. Donner une expression pour l'aire de $f(U)$. Dans le cas où U est un disque, calculer cette expression en fonction des coefficients du développement en série de f.

Exercice 8 Montrer que les intégrales impropres suivantes convergent :
$$I = \int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx \quad J = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx,$$

puis les calculer. Calculer aussi, pour $\Re\alpha \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} dx.$$