Analyse Complexe TD 11 (8/05 - 11/05)

On fixe un réseau Λ, et les fonctions elliptiques sont entendues elliptiques de périodes Λ. La fonction de Weierstrass associée est $\wp$.

Exercice 1

1. Montrer que $\wp$ admet une primitive $-\zeta_W$ (la fonction «zêta de Weierstrass»).
2. Construire une primitive logarithmique σ entière pour ζ_W (i.e $\zeta_W = \sigma'/\sigma$). Où sont les zéros de σ ? Pouvez-vous écrire σ comme un produit de Weierstrass ?

Exercice 2

1. Montrer que toutes les fonctions elliptiques paires s'écrivent sous la forme
$$C\frac{\prod(\wp - a_i)}{\prod(\wp - b_j)},$$
où les deux produits sont finis, et C est une constante. Identifiez les a_i et b_j.
2. Montrer l'énoncé du cours : les fonctions elliptiques se décomposent sous la forme
$$f = P(\wp) + \wp' Q(\wp),$$
où P et Q sont deux fractions rationnelles.

Exercice 3

1. Montrer que
$$\begin{vmatrix} \wp(z) & \wp'(z) & 1 \\ \wp(y) & \wp'(y) & 1 \\ \wp(z+y) & -\wp'(z+y) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$
vous pouvez commencer par montrer qu'il n'y a pas de pôle en $z = 0$.
2. On considère la courbe dans $\mathbb{C}^2$ image de $F : z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$, à laquelle on adjoint un point à l'infini. Décrire la position de $F(z+y)$ par rapport à celle de $F(z)$ et $F(y)$. Donner une opération géométrique qui permet d'additionner des points sur une telle courbe. Remarque : si vous vous renseignez sur la « forme normale de Weierstrass », vous saurez pourquoi toutes les courbes de degré 3 dans $\mathbb{C}^2$ sont essentiellement de la forme $y^2 = x^3 + px + q$.

Exercice 4

On se donne une courbe $\gamma : I = \,]0,1[\, \to \mathbb{C}$, dont on suppose qu'elle est analytique réelle (développable en série entière autour de chaque point dans un voisinage assez petit) ; on demande aussi que γ' ne s'annule pas.

1. Montrer que pour tout point $z = \gamma(t)$ de $\gamma(I)$, il existe un biholomorphisme entre un voisinage de z et un voisinage de 0, qui envoie la courbe $\gamma_{|]t-\epsilon,t+\epsilon[}$ sur l'axe réel.
2. Supposons que $\gamma(I)$ est fermée et simple. Montrer qu'il existe une involution anti-holomorphe σ d'un voisinage de $\gamma(I)$ dans lui même, dont les points fixes sont exactement les points de la courbe. Commencer par le montrer localement, puis vérifier que cela ne dépend pas de la paramétrisation de la courbe.
3. Soit γ une telle courbe et σ l'involution associée. On se donne U un ouvert connexe qui se décompose en $U = U_+ \coprod U_- \coprod (U \cap \gamma_d(I))$, avec $\sigma_d(U_+) = U_-$, où $U_\pm$ sont des ouverts. Soit f une fonction holomorphe définie sur U_+. On suppose que $\mathrm{Im} f \to 0$ quand $z \to \gamma(I)$. Montrer (en utilisant σ) que f se prolonge à U de façon unique en une fonction holomorphe.

4. Soit Ω un ouvert simplement connexe borné dont le bord est une courbe analytique réelle. Montrer que l'application de Riemann F de Ω dans $\mathbb{D}$ se prolonge à un voisinage de Ω en un biholomorphisme. À cet effet, considérer des déterminations du logarithme de F près d'un point du bord de Ω. Remarquez que vous n'avez pas besoin d'utiliser la continuité au bord démontrée dans le cours.
5. * Plus généralement, considérez une deuxième courbe η dont l'image est simple, et supposez que f est une application holomorphe sur U_+ qui s'approche de $\eta(I)$ quand z s'approche de $\gamma(I)$. Prouvez que là encore, f se prolonge de l'autre côté de γ.