Des formes bilinéaires en combinatoire

par

Pierre BORNSZTEIN[1]

Xavier CARUSO[2]

RÉSUMÉ. *On montre comment l'introduction de certains concepts algébriques, en l'occurrence les formes bilinéaires, peuvent être utiles à la résolution de certains problèmes combinatoires. On crée ainsi un pont entre deux domaines des mathématiques sans rapport évident.*

MOTS-CLÉS : *Formes bilinéaires, combinatoire, corps de caractéristique* 2

Les parties 1.1 et 2.4 peuvent être lues indépendamment et sont rédigées de façon à être parfaitement comprises par les élèves de TS. Le reste du texte donne un sens plus profond à ces parties.

Introduction

Le but de cet article est de mettre à jour des ponts non triviaux existant entre la combinatoire et l'algèbre linéaire. Nous commençons par donner l'énoncé d'un problème combinatoire olympique, suivi d'une solution purement combinatoire. Cette solution est élémentaire dans tous les sens du terme mais ne permet pas vraiment de comprendre ce qui se passe.

Nous verrons ensuite en quoi ce premier énoncé est un cas particulier d'un résultat plus général, résultat d'ailleurs donné en exercice à un oral d'Ulm. Là encore, nous donnerons une première solution que l'on décortiquera par la suite afin d'en obtenir une nouvelle beaucoup plus conceptuelle.

Nous verrons finalement que ces concepts se généralisent de façon assez remarquable et permettent de résoudre d'autres questions *a priori* totalement combinatoires de façon algébrique.

1 Un problème olympique

Voici donc l'énoncé du problème qui va nous intéresser dans cette première partie :

[1] Professeur agrégé de mathématiques ; e-mail : `bornsztein@voila.fr`

[2] Élève de l'École Normale Supérieure de Paris ; e-mail : `xavier.caruso@normalesup.org`

Énoncé 1 (Olympiades de Saint-Pétersbourg [1]) Les élèves d'une classe vont s'acheter des glaces par groupes d'au moins deux personnes. Deux groupes différents n'ont jamais plus d'une personne en commun et deux élèves quelconques partent au moins une fois ensemble s'acheter une glace. S'il y a eu $k > 1$ groupes en tout, prouver qu'il n'y a pas plus de k élèves dans cette classe.

1.1 Une solution élémentaire

Pour fixer les notations, appelons n le nombre d'élèves.

Dans tout ce paragraphe, nous allons désigner par la lettre a les élèves et par la lettre G les groupes. En particulier, lorsque ces indices apparaîtront dans les sommations, il sera sous-entendu que la somme est étendue à tout l'ensemble correspondant.

Comme $k > 1$, il y a au moins deux groupes. Deux groupes distincts ont un seul élève en commun au plus et ont chacun plus d'un élève, donc aucun groupe n'inclut un autre groupe et aucun n'est égal à la classe entière. Ainsi $1 < \operatorname{Card} G < n$ pour tout groupe G, et $n > 2$.

Soit a est un élève. Notons $d\,(a)$ le nombre de groupes contenant a. Soit G un groupe contenant a, G contient un élève b distinct de a et il existe un élève c non situé dans G. Les élèves b et c sont dans un même groupe distinct de G et qui ne contient pas a puisqu'il y a déjà b en commun avec G. Donc il existe un groupe ne contenant pas a et $d(a) < k$.

De plus, si G est un groupe, on a $2 \leqslant \operatorname{Card} G < n$. En considérant la somme double $S = \sum_G \sum_{a \in G} 1$ et en l'exprimant de deux façons différentes en commençant à sommer soit sur les élèves soit sur les groupes, on obtient l'égalité :

$$S = \sum_a d\,(a) = \sum_G \operatorname{Card} G \tag{1}$$

Soit a un élève et G un groupe qui ne contient pas a. Pour tout élève x dans G, il existe un groupe $G\,(x)$ qui contient a et x et évidemment $G \neq G\,(x)$. Donc si x et y sont deux élèves distincts dans G, on a $G\,(x) \neq G\,(y)$ (puisque G est le seul groupe qui contienne x et y). On en déduit que $d\,(a) \geqslant \operatorname{Card} G$.

Montrons à présent $n \leqslant k$. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose $n > k$. Alors, pour tout couple (a, G) tel que a n'est pas dans G, on a d'après ce qui précède :

$$0 < k - d\,(a) \leqslant k - \operatorname{Card} G < n - \operatorname{Card} G$$

d'où, grâce à ces inégalités et à $d(a) \geqslant k$:

$$\frac{\operatorname{Card} G}{n - \operatorname{Card} G} < \frac{d\,(a)}{k - d\,(a)}$$

Posons :

$$S' = \sum_G \sum_{a \notin G} \frac{\operatorname{Card} G}{n - \operatorname{Card} G} \quad \text{et} \quad S'' = \sum_a \sum_{G | a \notin G} \frac{d(a)}{k - d(a)}$$

On a donc d'une part $S' < S''$.

D'autre part, le nombre d'élèves a non situés dans un groupe G est $n - \operatorname{Card} G$, donc :

$$S' = \sum_G \sum_{a \notin G} \frac{\operatorname{Card} G}{n - \operatorname{Card} G} = \sum_G (n - \operatorname{Card} G) \frac{\operatorname{Card} G}{n - \operatorname{Card} G} = \sum_G \operatorname{Card} G$$

De même, le nombre de groupe G ne contenant pas un élève a est $k - d(a)$, et donc :

$$S'' = \sum_a \sum_{G | a \notin G} \frac{d(a)}{k - d(a)} = \sum_a (k - d(a)) \frac{d(a)}{k - d(a)} = \sum_a d(a)$$

Les deux égalités précédentes prouvent d'après (1) que $S' = S''$ ce qui contredit $S' < S''$. Finalement, on a bien $n \leqslant k$.

1.2 Une autre approche

La solution précédente a l'avantage d'être totalement élémentaire mais en contrepartie elle a l'inconvénient de ne pas être conceptuelle. On ne comprend pas franchement ce qui fait marcher les choses, et on aura donc certainement du mal à la généraliser à des situations relativement proches.

Toutefois, on peut voir les choses différemment. Pour cela, il faut un peu retourner le problème et définir, pour tout élève a, G_a comme l'ensemble des groupes dans lesquels on trouve a. Si a et b sont deux élèves distincts, les hypothèses faites assurent directement que $G_a \cap G_b$ est de cardinal exactement 1. En effet, comme deux élèves quelconques partent au moins une fois ensemble on a $\operatorname{Card}(G_a \cap G_b) \geq 1$. Et d'autre part, si les élèves a et b se retrouvaient ensemble dans deux groupes distincts, ces deux groupes auraient deux élèves en commun, ce qui est supposé faux.

L'énoncé 1 découle dans ces conditions de l'énoncé suivant :

Énoncé 2 (Oral ENS) Soit E un ensemble fini de cardinal m et a un entier strictement positif. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des parties de E telles que Card $(A_i \cap A_j) = a$ dès que $i \neq j$. Prouver que $n \leqslant m$.

Ce dernier énoncé a l'avantage de se résoudre relativement simplement et surtout de façon beaucoup plus conceptuelle.

Classiquement, comme par exemple dans [2], pour résoudre cet exercice, on fait intervenir des matrices. Supposons pour simplifier que l'ensemble E soit

$\{1, 2, \ldots, m\}$. On note M la matrice à m lignes et n colonnes dont le coefficient général m_{ij} vaut 1 si l'entier i appartient au sous-ensemble A_j, et 0 sinon.

On calcule le produit $T = {}^tMM$. C'est une matrice carrée de taille n dont le coefficient général t_{ij} donne le cardinal de l'intersection $A_i \cap A_j$. Si l'on prouve que T est inversible, son rang sera n et donc il en sera de même de la matrice M. En particulier, on aura $n \leqslant m$. Prouvons donc l'inversibilité de T.

Par hypothèse, on sait déjà que $t_{ij} = a$ dès que $i \neq j$. D'autre part, on peut supposer $n > 1$ et on a alors on a $t_{ii} \geqslant a$ pour tout i. En effet, le cardinal de A_i est supérieur à celui de $A_i \cap A_j$. En outre, il n'est pas possible qu'il existe deux indices distincts i et j tels que $t_{ii} = t_{jj} = a$. Si tel était le cas, les ensembles A_i, A_j et $A_i \cap A_j$ seraient tous trois de cardinal a et donc seraient égaux. Mais on a supposé que A_i était distinct de A_j dès que $i \neq j$.
La matrice T représente donc la forme bilinéaire associée à la forme quadratique suivante :

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto a \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} (t_{ii} - a)\, x_i^2$$

qui est définie positive et donc non dégénérée en vertu de la description précédente. Elle est donc inversible, ce qui entraîne la conclusion.

1.3 De façon conceptuelle

La preuve précédente peut se réécrire sans évoquer les matrices mais en remplaçant celles-ci par des formes bilinéaires. Précisément, on considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}$ des fonctions de E dans $\mathbb{R}$. C'est un espace de dimension $\operatorname{Card} E = m$. De plus, on dispose sur $\mathcal{F}$ du produit scalaire canonique donné par :

$$\varphi\,(f, g) = \sum_{x \in E} f(x) g(x)$$

Les sous-ensembles $A_i \subset E$ définissent des éléments de $\mathcal{F}$ *via* leur fonction caractéristique. Plus exactement, disons que l'on note $\chi_i \in \mathcal{F}$ la fonction caractéristique de l'ensemble A_i ; il est alors immédiat de voir que $\varphi\,(\chi_i, \chi_j)$ est égal au cardinal de l'intersection $A_i \cap A_j$. Ainsi, notre hypothèse se traduit ici par $\varphi\,(\chi_i, \chi_j) = a$ si $i \neq j$ et bien sûr $a_i = \varphi\,(\chi_i, \chi_i) \geqslant a$, ces dernières inégalités étant strictes sauf éventuellement une.

Ceci suffit à impliquer que la famille des χ_i est libre et donc que $n \leqslant m$. En effet, considérons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que $\lambda_1 \chi_1 + \ldots + \lambda_n \chi_n = 0$. En prenant le produit scalaire de cette dernière inégalité par χ_i, on obtient $\lambda_i a_i + (\lambda - \lambda_i)\, a = 0$ où par définition $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$. S'il existe un indice i tel que $a_i = a$, on en déduit que $\lambda = 0$ (puisque $a > 0$), ce qui conclut directement. Sinon, pour tout indice i, on a $a_i > a$, et l'équation $\lambda_i\,(a_i - a) = -\lambda a$ prouve que λ_i est toujours du signe contraire de λ, ce qui n'est possible que si tous les λ_i sont nuls. La famille est bien libre.

On peut remarquer que cette dernière formulation est exactement équivalente à celle qui utilisait les matrices. L'idée d'introduire le produit scalaire φ et de calculer les $\varphi(\chi_i, \chi_j)$ correspond exactement à l'idée d'introduire la matrice M et de calculer le produit matriciel ${}^tMM$. Le calcul qui suit et qui prouve la liberté de la famille des χ_i, quant à lui, correspond exactement à l'argument que l'on a donné pour l'inversibilité de la matrice T.

2 Question de parité

Les idées précédentes sont très utiles lorsque l'on considère un ensemble E, des sous-ensembles $A_i \subset E$ et que l'on donne des conditions sur le cardinal des A_i et sur le cardinal des intersections $A_i \cap A_j$. Par exemple, nous allons voir ce qui se passe lorsque l'on impose des conditions de parité, situation la plus favorable en réalité.

Commençons tout d'abord par fixer la terminologie. On dira qu'un ensemble fini est *pair* (resp. *impair*) s'il est de cardinal pair (resp. impair).

On se donne donc un ensemble E de cardinal N et on cherche à construire une famille de sous-ensembles $(A_1, \ldots, A_k)$ deux à deux distincts vérifiant, au choix, l'une des quatre conditions suivantes :

- **IP)** Les ensembles A_i sont impairs et les intersections $A_i \cap A_j$ sont paires dès que $i \neq j$
- **PI)** Les ensembles A_i sont pairs et les intersections $A_i \cap A_j$ sont impaires dès que $i \neq j$
- **PP)** Les ensembles A_i et les intersections $A_i \cap A_j$ sont paires.
- **II)** Les ensembles A_i et les intersections $A_i \cap A_j$ sont impaires.

On appellera *famille IP* toute famille vérifiant la condition IP, et ainsi de suite. Le but est de déterminer le cardinal maximal d'une famille IP, PI, PP et PI en fonction de N.

Pour répondre à ces questions, on reprend l'approche précédente mais on remplace le corps $\mathbb{R}$ par le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ce dernier ayant l'avantage de calculer des parités. Plus exactement, on note $\mathcal{F}$ le $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel des fonctions de E dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Comme précédemment, si A est un sous-ensemble de E, il définit un élément $\chi \in \mathcal{F}$ qui n'est autre que sa fonction caractéristique.

Avant de rentrer plus avant dans les détails, nous allons faire des rappels sur les formes bilinéaires définies sur un corps quelconque, et en particulier, nous allons expliquer ce qui reste vrai en caractéristique 2.

2.1 Formes bilinéaires sur un corps quelconque

Dans tout ce qui suit V désigne un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ fixé.

La définition d'une forme bilinéaire sur V ne change pas : il s'agit d'une application $\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ vérifiant les propriétés habituelles. Comme d'habitude, une forme bilinéaire φ sera dite *symétrique* si $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ pour tous vecteurs x et y dans V.

Le seul écueil est qu'en caractéristique 2, la réduction de Gauss ne fonctionne plus[3], et donc évidemment toutes ses conséquences. Certaines propriétés demeurent toutefois et nous allons brièvement les rappeler.

Soit φ une forme bilinéaire *symétrique*. Comme à l'habitude, un vecteur $x \in V$ sera dans le *noyau* de φ si pour tout $y \in V$, $\varphi(x,y) = 0$. De plus, φ est dite *non dégénérée* lorsque son noyau est réduit au vecteur nul.

On fera toutefois attention au fait qu'il n'est pas possible de définir de façon générale la positivité ou la négativité étant donné que l'on ne dispose pas d'ordre sur le corps $\mathbb{K}$.

Si W est une partie de V, on définit l'*orthogonal* de W au sens de φ par :

$$W^{\perp} = \{v \in V \quad | \quad \forall w \in W, \varphi(v,w) = 0\}$$

L'orthogonal de W est égal à l'orthogonal du sous-espace vectoriel engendré par W et si la forme φ est non dégénérée et W un sous-espace vectoriel de V, on a l'égalité de dimension :

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$$

qui implique en particulier que $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$

Un sous-espace W de V est dit *totalement isotrope* pour φ si pour tous x et y dans W, $\varphi(x,y) = 0$. Autrement dit W est totalement isotrope si et seulement si $W \subset W^{\perp}$. Cette dernière formulation assure que si W est totalement isotrope pour une forme bilinéaire non dégénérée φ, on a l'inégalité dimensionnelle :

$$\dim W \leqslant \frac{\dim V}{2}$$

2.2 Retranscription des problèmes

On reprend le problème mentionné au début de la section 2, à savoir le calcul du cardinal maximal d'une famille respectivement IP, PI, PP et II. Pour cela, on reprend l'espace $\mathcal{F}$ des fonctions de E dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. C'est un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel de dimension N, le cardinal de E. On le munit de la forme bilinéaire suivante :

$$\varphi(f,g) = \sum_{x \in E} f(x)g(x)$$

où bien entendu la somme se fait dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Dans ces conditions, une partie $A \subset E$ est paire si, et seulement si $\varphi(A,A) = 0$. Dans le cas où cette éventualité ne se produit pas, évidemment, $\varphi(A,A) = 1$ et la partie A est impaire. Plus généralement, si A et B sont deux parties de E, l'intersection $A \cap B$ est paire si et seulement si $\varphi(A,B) = 0$.

Les quatre problèmes se reformulent et se résolvent alors comme suit.

[3]On ne peut en effet plus écrire $xy = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4}$.

2.3 Résolution dans chacun des cas

Le cas IP

Une solution au problème IP correspond à une famille de vecteurs $a_1, \ldots, a_k$ qui forment une famille orthonormée, c'est-à-dire telle que $\varphi(a_i, a_j) = \delta_{ij}$ pour tous i et j compris entre 1 et k.

Théorème 1. *Le cardinal maximal d'une famille IP est N.*

En effet, on sait qu'une famille orthonormée est nécessairement libre et donc de cardinal inférieur à la dimension, en l'occurrence N. D'autre part, trouver une famille orthonormée de cardinal N est facile.

Le cas PI

Une solution au problème PI correspond à une famille de vecteurs $a_1, \ldots, a_k$ telle que $\varphi(a_i, a_j) = 1 - \delta_{ij}$ (δ désignant le symbole de Kronecker).

Théorème 2. *Le cardinal maximal d'une famille PI est le plus grand entier impair inférieur ou égal à N.*

Comme précédemment, regardons si une telle famille est forcément libre. Soient donc $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des scalaires, éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, vérifiant $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k = 0$. On compose par $\varphi(a_i, \cdot)$, ce qui nous donne $\lambda_i = \lambda$ où par définition $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_k$. Cela implique en particulier que tous les λ_i sont égaux et donc la seule liaison possible est $a_1 + \ldots + a_k = 0$. Mais dans ce cas on doit avoir $\lambda = 1$ et donc k impair.

Supposons maintenant que $N = 2n+1$ soit un nombre impair. Ce qui précède prouve que toute sous-famille de cardinal pair de notre famille PI est libre. Si $k \geqslant N + 1 = 2n + 2$, on obtient donc une contradiction en considérant une sous-famille de cardinal $N + 1$. Par conséquent, $k \leqslant N$.

Réciproquement, il est possible dans ce cas de trouver une famille de cardinal N qui convienne. Il suffit par exemple de définir pour tout $x \in E$, la fonction caractéristique de $E \setminus \{x\}$ et de vérifier que cela fonctionne.

Reste à traiter le cas où $N = 2n$ est un nombre pair. Il faut remarquer dans ce cas que la condition $\varphi(a_i, a_i) = 0$ impose une contrainte supplémentaire. Plus précisément si l'on note v la fonction constante égale à 1, la condition $\varphi(a_i, a_i) = 0$ est équivalente à $\varphi(a_i, v) = 0$. On voit ainsi que tous les a_i doivent être dans un certain hyperplan, fixé à l'avance. En particulier, le cardinal maximal d'une famille libre formée de a_i n'est pas N, mais $N - 1$. On applique pour conclure le même raisonnement que précédemment qui prouve que le maximum recherché est dans ce cas majoré par $N - 1$.

Bien sûr, cette valeur est atteinte : l'exemple donné dans le cas N impair est encore valable.

Le cas PP

Une solution au problème PP correspond à un sous-ensemble (qui n'est pas forcément *a priori* un sous-espace) totalement isotrope pour φ.

Théorème 3. *Le cardinal maximal d'une famille PP est* $2^{[N/2]}$ *où* $[x]$ *désigne la partie entière du réel* x.

Quitte à prendre l'espace engendré par un sous-ensemble qui convient, opération qui augmente manifestement le cardinal, on peut supposer que l'on a affaire à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$, disons V.

Précédemment, on a vu une majoration sur la dimension d'un sous-espace vectoriel totalement isotrope lorsque la forme était non dégénérée. Dans notre cas, on obtient $\dim V \leqslant \frac{N}{2}$. Or, $\dim V$ étant forcément un entier, cette majoration devient immédiatement :

$$\dim V \leqslant \left[\frac{N}{2}\right]$$

ce qui implique :

$$\mathrm{Card}\, V \leqslant 2^{[N/2]}$$

ce qui correspond bien à la majoration annoncée.

Il ne reste plus qu'à construire une famille de parties de E de cardinal $2^{[N/2]}$ répondant à la question. Pour cela, on choisit des sous-ensembles de E, disons $A_1, \ldots, A_{[N/2]}$, tous de cardinal 2 et disjoints deux à deux. Maintenant pour tout partie $I \subset \{1, 2, \ldots, [N/2]\}$, on pose $A_I = \cup_{i \in I} A_i$. Ces ensembles s'écrivent comme une union disjointe d'ensembles de cardinal 2 ; ils sont donc pairs. De plus $A_I \cap A_J = A_{I \cap J}$ et donc cette intersection est aussi un ensemble pair, et ce pour la même raison. Le nombre d'ensembles ainsi décrits correspond au cardinal de $\mathcal{P}(I)$, c'est-à-dire $2^{[N/2]}$.

Le cas II

Une solution au problème II correspond à une famille de vecteurs $(a_1, \ldots, a_k)$ telle que $\varphi(a_i, a_j) = 1$ pour tous indices i et j.

Théorème 4. *Le cardinal maximal d'une famille II est* $2^{[(N-1)/2]}$.

L'idée consiste à se ramener à un espace totalement isotrope par une manipulation simple. Si l'on pose par exemple pour tout indice i, $b_i = a_i + a_1$, on vérifie directement par le calcul que :

$$\varphi(b_i, b_j) = \varphi(a_i + a_1, a_j + a_1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 0$$

Ainsi l'espace formé des b_i (évidemment en bijection avec celui formé des a_i) que l'on va noter V est totalement isotrope et comme dans le paragraphe précédent son cardinal est majoré par $2^{[N/2]}$. Seulement, cela n'est pas suffisant dans ce cas.

Il faut voir ici en outre que le vecteur a_1 est orthogonal à V. En effet $\varphi(b_i, a_1) = \varphi(a_i + a_1, a_1) = 1 + 1 = 0$. De plus, ce vecteur n'est pas élément de V. Le cas échéant, on aurait $a_i = 0$ pour un certain indice i, et ceci est incompatible avec la condition $\varphi(a_i, a_i) = 1$. On a exhibé un vecteur de $V^{\perp}$ qui n'est pas dans V et donc l'inclusion de V dans $V^{\perp}$ est stricte. Sur les dimensions, cela se traduit par l'inégalité $\dim V \leqslant N - \dim V - 1$ et donc :

$$\dim V \leqslant \left[\frac{N-1}{2}\right]$$

De fait, on obtient la majoration par $2^{[(N-1)/2]}$, comme annoncé.

Cette dernière est bien optimale. Pour le montrer, on choisit un élément privilégié, disons x, dans E. Comme dans la construction du paragraphe précédent, on choisit $A_1, \ldots, A_{[(N-1)/2]}$ des parties de $E \setminus \{x\}$ de cardinal 2 et deux à deux disjointes. Si I est une partie de $\{1, 2, \ldots, [(N-1)/2]\}$, on définit $A_I = \{x\} \cup \bigcup_{i \in I} A_i$. La partie A_I est évidemment de cardinal impair et le fait que $A_I \cap A_J = A_{I \cap J}$ prouve qu'il en est de même des intersections. Finalement, le cardinal de cette famille est bien $2^{[(N-1)/2]}$.

2.4 Reformulation élémentaire

Pour finir, il est intéressant de noter qu'il est parfois possible de reformuler les preuves données précédemment et de produire ainsi des preuves « purement » combinatoires. Nous allons faire l'exercice, pour le cas IP qui est le plus simple.

On rappelle donc l'énoncé : soit E un ensemble fini de cardinal N et soit $A_1, \ldots, A_k$ des sous-ensembles de E chacun de cardinal impair et tels que pour tous $i \neq j$, le cardinal de l'intersection $A_i \cap A_j$ soit pair. Il s'agit de prouver que $k \leq N$.

Pour cela, on montre successivement les deux lemmes suivants, la conclusion étant alors immédiate.

Lemme 1. *Soit J une partie non vide de $I = \{1, \ldots, k\}$, alors il existe x dans E tel que l'ensemble $\{j \in J \,/\, x \in A_j\}$ soit de cardinal impair.*

Lemme 2. *Soient $B_1, \ldots, B_k$ des sous-ensembles* quelconques *(éventuellement confondus) de E. Si $k > N$, alors il existe une partie J non vide de $I = \{1, \ldots, k\}$ telle que tous les ensembles $\{j \in J \,/\, x \in B_j\}$ soient de cardinal pair.*

Commençons par prouver le premier lemme. On raisonne par l'absurde et donc on suppose que $U_x = \{j \in J \,/\, x \in A_j\}$ est de cardinal pair pour tout x. On fixe $j_0 \in J$ (on rappelle que J est supposé non vide) et on regarde l'ensemble :

$$V_x = \{j \in J \,/\, x \in A_j \cap A_{j_0}\}$$

C'est l'intersection de U_x et de $\{j \in J \,/\, x \in A_{j_0}\}$. Ce dernier ensemble est soit vide si x n'est pas dans A_{j_0}, soit tout J sinon. Ainsi V_x est soit égal à U_x, soit vide. Dans tous les cas, il est de cardinal pair. On regarde ensuite l'ensemble :

$$V = \{(x, j) \in E \times J \,/\, x \in A_j \cap A_{j_0}\}$$

Si l'on fixe x, l'ensemble des j tels que $(x, j) \in V$ est exactement V_x. On en déduit que V est de cardinal pair. Maintenant, si l'on fixe j, l'ensemble des x tels que $(x, j) \in V$ est $A_j \cap A_{j_0}$. Le cardinal de ce dernier ensemble est toujours pair par hypothèse sauf quand $j = j_0$, auquel cas il est impair. Il en résulte que V est de cardinal impair, ce qui est contradictoire.

Pour le second lemme, on fait une récurrence sur N. On peut directement commencer à $N = 0$ et dans ce cas, c'est immédiat. Pour l'hérédité, on prend $E = \{x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}\}$ et $B_1, \ldots, B_k$ avec $k > N + 1$ (donc $k \geq N + 2$) une famille de sous-ensembles de E. On pose $E' = \{x_1, \ldots, x_N\}$ et $B'_i = E' \cap B_i$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe J_1 et J_2 respectivement inclus dans $\{1, \ldots, N + 1\}$ et $\{2, \ldots, N + 2\}$ tels que tous les $\{j \in J_\star \,/\, x \in B'_j\}$ (où « $\star$ » remplace 1 ou 2) soient de cardinal pair pour x dans E'. Mais si x est dans E', on a :

$$\{j \in J_\star \,/\, x \in B'_j\} = \{j \in J_\star \,/\, x \in B_j\}$$

Si par chance, $\{j \in J_1 \,/\, x_{N+1} \in B_j\}$ ou $\{j \in J_2 \,/\, x_{N+1} \in B_j\}$ est de cardinal pair, on a gagné. Sinon, ils sont tous les deux impairs, et on pose $J = J_1 \Delta J_2$ (où « Δ » est la différence symétrique). Alors pour tout $x \in E$:

$$\{j \in J \,/\, x \in B_j\} = \{j \in J_1 \,/\, x \in B_j\} \Delta \{j \in J_2 \,/\, x \in B_j\}$$

et les cardinalités des ensembles dans le deuxième membre de l'égalité sont simultanément de même parité, donc leur différence symétrique est de cardinal pair.

On remarquera que cette dernière preuve est une recopie pure et simple de la preuve utilisant l'algèbre bilinéaire donnée précédemment. Le premier lemme correspond à voir qu'une famille orthonormée est nécessairement libre, et le second correspond à la preuve du fait qu'une famille libre dans un espace de dimension N est de cardinal inférieur ou égal à N.

Références

[1] *Crux Mathematicorum* **28** (2002), p. 202

[2] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques. Oraux X-Ens. Algèbre 1*, §. 1.11, Cassini

[3] `http://mathcentral.uregina.ca/MP/fprevious2002/mar03sol.html`

[4] L. Babai, P. Frankl, *Linear Algebra Methods in Combinatorics*, version préliminaire non encore publiée