

Sujets Maths en Jeans 2025-2026

Proposés par Vincent Guirardel

1 Retour a la case départ

Prenons un paquet de cartes. Pour le mélanger, on a beaucoup de possibilités: couper, faire un mélange américain, voire des choses plus compliquées.

Il s'agit d'étudier ce qu'il se passe lorsque, pour mélanger, on répète un certain nombre de fois la même opération de mélange (exactement !).

Par exemple, on peut prendre un paquet de 8 cartes, et décider que pour mélanger, on va couper le paquet en 3+5 cartes, et échanger les deux sous-paquets. Si on répète cela 8 fois, on constate que on retombe sur l'ordre des cartes initial: elles n'ont pas été mélangées du tout !

Si on fait un mélange américain parfait, en 3 mélanges, les cartes retrouvent leur ordre original !

Plus généralement, le mélange américain parfait consiste à couper le paquet en 2 moitiés égales, ¹ puis à intercaler les cartes: 1 carte du tas du dessus, 1 carte du tas du dessous, 1 carte du tas du dessus, etc.

Problème. Prenons un paquet de n cartes (par exemple 32, 52 ou 78, ou un nombre arbitraire).

Est-ce que si on applique un certain nombre de fois le mélange américain, on va toujours retomber sur la configuration initiale ?

Si oui, comment trouver ce nombre en fonction de n ?

On peut se poser la même question pour les mélange de type "couper". On peut aussi étudier ce qu'il se passe avec peu de cartes (2,3,4,5...).

Est-ce que ce phénomène se produit toujours, quel que soit le système de mélange utilisé, aussi compliqué soit-il ?

Problème. Si on choisit un système de mélange, et qu'on l'applique un certain nombre de fois a un paquet de cartes, va-t-on forcément retomber dans la configuration initiale au bout d'un certain temps ?

Si on se donne un système de mélange qui lorsqu'on le répète, ramène les cartes dans leur ordre initial, on appelle *temps de retour* le nombre minimal de répétitions pour que cela se produise.

Problème. Parmi les systèmes de mélange qui font retomber sur le mélange initial, quel est le temps de retour le plus grand ?

Ce nombre dépend du nombre n de cartes. On peut commencer par comprendre ce qu'il se passe avec peu de cartes.

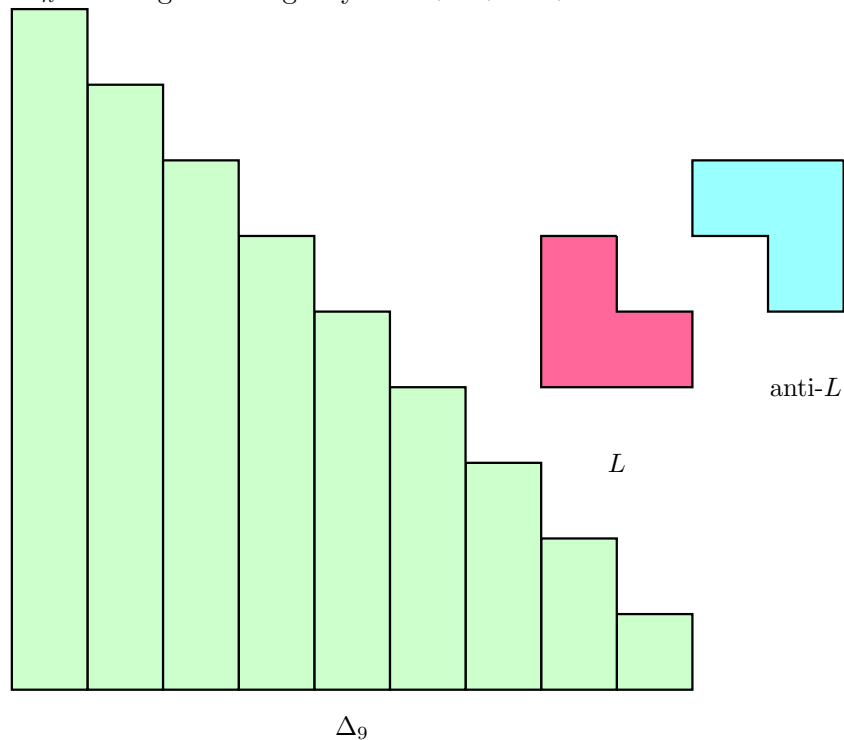
Problème. Pour un jeu de 52 cartes, quel est le temps de retour le plus grand possible ?

Si on n'arrive pas à le calculer précisément, on peut chercher à le minorer, c'est à dire dire qu'il vaut au moins tant, ou à le majorer (il faut au plus tant)...

¹S'il y a un nombre impair de cartes, on coupe le paquet en deux en mettant 1 carte de plus dans le premier tas avant d'intercaler les cartes.

2 Pavages par des L

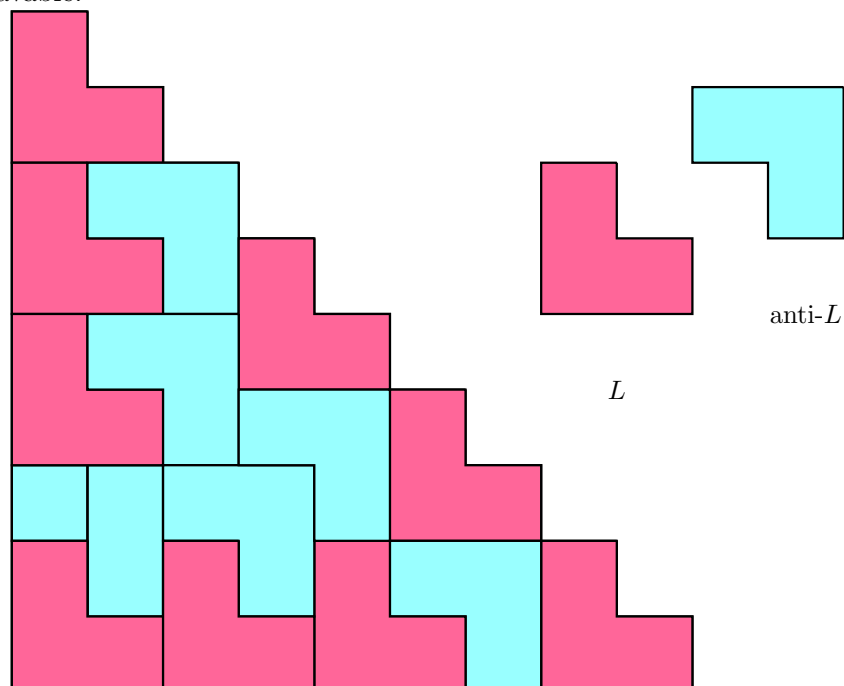
On considère Δ_n le triangle rectangle ayant $1 + 2 + \dots + n$ cases.



Question. Pour quelles valeurs de n peut-on paver Δ_n par des L et $\text{anti-}L$ (sans les tourner) ?

Exemples: Δ_2 est pavable. Δ_3 ne l'est pas. Δ_4 non plus.

Δ_9 est pavable:

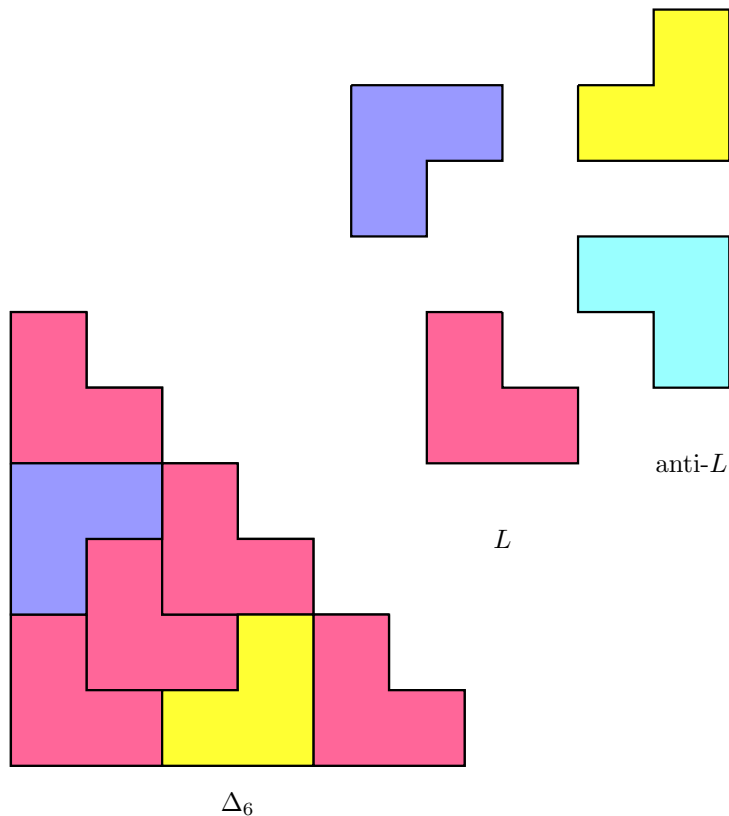


Variantes de la question: Y-a-t-il une infinité de n tels que Δ_n soit pavable ?

Une infinité de Δ_n non pavables ?

Que se passe-t-il pour $n = 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, \dots$? Pouvez-vous le dire pour $n = 100, 101, 102, \dots$? $n = 2012$? 2013 ? 2014 ? 2015 ? 2016 ?

On peut aussi poser la même question si on autorise à tourner d'un quart de tour. Δ_6 est pavable dans ce cas.



Meme question en remplaçant Δ_n par des carres ? des rectangles ?

3 Faire rouler un polyèdre.

Il y a 5 polyèdres réguliers: le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.

On veut comprendre ce qu'il se passe si on fait rouler un de ces polyèdres sur un plan, sans glisser.

Dans le cas du cube: si on le fait rouler 2 cases en avant, 1 case à gauche, 2 cases en arrière, puis 1 case à droite, il revient à son point de départ mais il s'est renversé (le haut est arrivé en bas).

Problème. *Peut-on faire revenir le cube à son point de départ pour obtenir les configurations du dé obtenues en le tournant dans tous les sens (combien y a-t-il de configurations possibles d'ailleurs)?*

Peut-on le faire aller n'importe où avec n'importe quelle configuration ?

Problème. *Mêmes questions avec les autres polyèdres.*

Variante: on peut aussi penser à d'autres polyèdres moins réguliers (comme des dés de jeu de rôle, à 10 faces par exemple ou autres).

4 Très double, très triple

Un nombre entre 0 et 1 est *très double* si tous ses chiffres (après la virgule) sont pairs, c'est à dire qu'il ne s'écrit qu'avec les chiffres 0, 2, 4, 6, 8. Par exemple

0.24680246802468 et 0.66666666

sont *très doubles*, mais 0.25444444 ne l'est pas (à cause du 5). De même, on dit qu'un nombre est *très triple* s'il ne s'écrit qu'avec les chiffres 0, 3, 6, 9.

Questions Quels sont les nombres réels entre 0 et 1 qui s'écrivent comme somme (finie) de nombres très doubles ? et de nombres très triples ?

Quels sont les nombres réels entre 0 et 1 qui s'écrivent comme somme de deux de nombres très doubles ? et de deux nombres très triples ?

Y-a-t-il une longueur de somme qui suffit pour obtenir tous les réels entre 0 et 1 ? Est-ce que par exemple tout nombre entre 0 et 1 est somme de 2 nombres très doubles ? de 100 nombres très doubles ? Quelle est la longueur de somme minimale ? Mêmes questions pour les très triples ?

5 Dames à empiler

Il s'agit d'un jeu solitaire. On a un damier de taille $n \times n$. Sur chaque case, on pose un jeton (une dame). Le but est d'empiler tous les jetons pour faire une seule grande pile.

Pour cela, la règle est qu'on peut empiler une pile sur une pile d'une case adjacente à condition que la pile d'arrivée soit au moins aussi haute que la pile de départ. On déplace la pile entière à chaque fois, on ne peut pas la scinder. On ne peut pas sauter, ni utiliser les diagonales.

Exemple: si sur la case A il y a une pile de 2, et sur la case B juste à côté, une pile de 4, on peut déplacer la pile de la case A sur la case B : la case A est vide et la case B a une pile de 6. On ne peut pas aller dans l'autre sens (on aurait pu aller dans les 2 sens si les 2 piles étaient de tailles égales). On ne peut jamais déplacer une pile sur une case vide.

Le but est d'obtenir une seule pile à la fin, sinon le moins de piles possibles.

Exemple: sur un damier 3×3 c'est très facile d'arriver à une seule pile.

Problème. *Pour quelles tailles de grille est-il possible d'obtenir une seule pile ?*

Sinon, quelle est le nombre minimal de piles qu'on peut obtenir en fonction de la taille de la grille ?

Par exemple, que se passe-t-il par exemple pour un échiquier 8×8 ou un damier 10×10 ? Il vaut probablement mieux commencer par des petites tailles de damier.

Que se passe-t-il sur des damiers rectangulaires ? Pour un damier 4×1 , 5×1 , $n \times 1$? $n \times 2$? ...

Si on ne sait pas exactement déterminer le nombre minimal de piles qu'on peut obtenir, on peut essayer de le majorer ou de le minorer; par exemple si sur un damier 10×10 , on arrive à regrouper les pions en 13 piles, alors on sait que le nombre minimal est ≤ 13 (majoration). Si on arrive à démontrer qu'on ne peut pas arriver à faire 2 piles, alors le nombre minimal est au moins 3 (minoration).