Sujets Maths en Jeans 2024-2025

Proposés par Vincent Guirardel

1 Colorier le plan

On veut colorier le plan avec un certain nombre de couleurs de sorte que dès qu'on prend 2 points à distance 1, ils sont coloriés de couleurs différentes.

Le problème général est le suivant:

Question. *Quel est le nombre minimal de couleurs nécessaire pour colorier chaque point du plan de sorte que deux points à distance 1 soient toujours de couleurs différentes.*

On peut couper la question en deux: la première moitié consiste à démontrer que c'est impossible avec moins de x couleurs, pour certaines valeurs de x. Par exemple c'est évidemment impossible avec 1 seule couleur, mais on peut voir que c'est aussi impossible avec 2 couleurs.

La deuxième moitié de la question consiste à montrer que c'est possible avec y couleurs pour certaines valeurs de y, par exemple en trouvant un coloriage qui va bien.

Question 1.1 (Reformulation)**.** *Peut-on colorier avec 2 couleurs ? avec 3 couleurs ? 4 ? Et avec 20 couleurs ? avec 19 couleurs ? 18 ?*

Si on veut, on peut aussi se poser la même question dans l'espace de dimension 3. Ou aussi sur une sphère de rayon 1...

2 Réseau routier

Un hameau est composé de plusieurs maisons. On veut créer un réseau routier de longueur minimale qui les relie. Comment faire ?

S'il n'y a que 2 maisons, il suffit de les relier en ligne droite. S'il y en a trois, les difficultés commencent. On peut d'abord imaginer tracer les 3 côtés du triangle, mais il y a un coté superflu. Si par exemple, les 3 maisons sont aux sommets d'un triangle équilatéral ABC, on peut faire plus court que les deux segments AB et BC: on peut garder le coté AB, et remplacer BC par la hauteur BH issue de B. On peut alors encore raccourcir un peu le réseau routier en remplacant le point H par un point $H' \in [B, H]$ un peu plus pres de B, et en prenant le réseau routier $[A, H'] \cup [B, H'] \cup [C, H']$.

Question. *Etant donné un hameau, comment créer un réseau de longueur minimale ? Voici des cas particuliers qu'on peut considérer:*

- *cas d'un triangle équilatéral, quelconque*
- *cas d'un carré, d'un pentagone régulier, d'un hexagone régulier, ...*
- *cas d'un cube (pour un village spatial !)*

Dans chacun des cas, on peut donner des réponses partielles du type "n'importe quel réseau aura une longueur supérieure ou égale à tant" ou bien "on peut trouver un réseau ayant une longueur inférieure ou égale à tant"...

3 Nombres consécutifs: premiers ou composés, avec ou sans facteur carré.

On connaît la définition d'un nombre premier: c'est un entier ≥ 2 qui n'est divisible que par 1 et par lui même. Donc, si $n \geq 2$ n'est pas premier, il s'écrit comme le produit de deux nombres ≥ 2, on dit qu'il est *composé*.

Bien sûr, si on a deux entiers consécutifs, l'un des deux est pair. Donc sauf si on parle de la paire 2,3, il n'y a pas de paires d'entiers consécutifs qui sont des nombres premiers. Et si on regarde des nombres impairs, on peut trouver 2 consécutifs qui sont premiers: 11,13 ou 17,19. Personne ne sait s'il on peut trouver une infinité de paires de nombre premiers consécutifs, c'est la fameuse conjecture des nombres premiers jumeaux.

Question. *Si on cherche 3 nombres impairs consécutifs, on trouve* $3, 5, 7$*. Y en a-t-il d'autres ?*

Et si on regarde les nombres qui ne sont pas premiers, on peut trouver des longues suites: par exemple 24,25,26,27,28 est une suite de 5 nombres consécutifs qui ne sont pas premiers.

Question. *Existe-til des suites d'entiers consécutifs aussi longues qu'on veut (par exemple de longueur au moins 100) formées de nombres consécutifs qui sont tous non premiers ?*

On peut poser la même question pour les nombres avec ou sans facteur carré. On dit qu'un entier $n \geq 2$ a un facteur carré s'il existe un entier $d \geq 2$ tel que n est divisible par d^2. Par exemple 12 a un facteur carré puisqu'il est divisible par $4 = 2^2$. Le nombre 9 a aussi un facteur carré puisque c'est lui-même un carré. Par contre 15 n'a pas de facteur carré.

Question. *Y a-t-il des suites arbitrairement longues d'entiers consécutifs qui sont tous sans facteur carré ?*

Question. *Y a-t-il des suites arbitrairement longues d'entiers consécutifs qui ont tous un facteur carré ?*

4 Comment bien piper des dés

Si on truque deux dés à 6 faces (en changeant la probabilité d'obtenir chaque face), peut-on faire en sorte que chacun des résultats possibles (entre 2 et 12) ait la même probabilité de sortir ?

Toujours en truquant les dés comme au-dessus, peut-on faire en sorte que la proba d'avoir les même résultats (sur 2 dés) qu'avec une paire de dés non truqués ?

Mêmes questions si au lieu de truquer le dé en changeant la probabilité d'obtenir chaque face, on change les valeurs inscrites sur les dés, mais en gardant une proba 1/6 d'avoir chaque face.

5 Remplir un cube

On a un cube et des barreaux, et on veut savoir si on peut remplir le cube avec les barreaux. Par exemple, si le cube fait 3 de côté, et que les barreaux font $1 \times 1 \times 3$, alors on remplit facilement le cube (avec 9 barreaux). Si le cube fait 5cm de côté, ça n'est pas possible parce que $5 \times 5 \times 5$ n'est pas un multiple de 3.

Plus généralement, pour tout entiers $p \geq q$, on considère des cubes de côté p et on essaye de les remplir par des barreaux de taille $1 \times 1 \times q$.

- Quels sont les tailles de cube qu'on peut remplir avec un barreau de taille 3 ?
- Quels sont les tailles de cube qu'on peut remplir avec un barreau de taille 4 ?
- Quels sont les tailles de cube qu'on peut remplir avec un barreau de taille 5 ?
- Quels sont les tailles de cube qu'on peut remplir avec un barreau de taille q ?