Sujets Maths en Jeans 2023-2024

Proposés par Vincent Guirardel

October 10, 2023

1 Marche au compas

On considère $E = \mathbb{Z}^2$ l'ensemble des points du plan dont les deux coordonnées sont entières, et $O = (0, 0)$ l'origine.

On se donne un point $A \in E$, et on pose un compas entre O et A. L'écartement du compas est maintenant fixé une fois pour toutes, et on veut déplacer notre compas en gardant toujours une de ses deux pointes sur E.

Par exemple, si $A = (0, 1)$, On peut bouger le compas en $(0, 2)$ en tournant au tour de A puis en $(0, 3)$, $(0, 4)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$,... et on va pouvoir se déplacer en tout point de E.

Ca marche de la même façon pour les quatre points $A = (0, \pm 1)$ ou $A = (\pm 1, 0)$

Question 1.1. *Pour quels points de départ A peut-on visiter tout les points de E ?*

Est-ce qu'on peut en trouver d'autres que les 4 points de départ évidents ? Y en a-t-il une infinité ?

2 Palmarès des clubs les moins chers

La fédération des clubs de sports de balle veut faire un recensement des clubs multisports les moins chers. Elle ne considère que les clubs qui proposent le foot, hand, basket, volley, rugby, tennis, et ping-pong, soit 7 sports disons. On ne considère que les clubs qui proposent tous ces sports, et on ne considère aucun autre facteur. Les prix sont entiers (en euros, ou en centimes d'euros).

Par exemple, voici une liste de clubs avec leurs prix.

	foot	hand	basket	volley	rugby	tennis	ping-pong
A	100	100	100	100	100	100	100
B	110	100	110	120	130	100	100
C	110	90	100	110	110	80	80
D	120	80	100	100	110	90	80
A'	100	100	100	100	100	100	100

Alors la fédération ne retiendra pas le club B parce qu'il est plus cher que le A sur tous les sports. Par contre, en comparant A et C, elle n'a pas de raison de rejeter C puisque C est moins cher en hand, ni de rejeter A puisque A est moins cher en foot. De même, en comparant, D avec A et C, elle n'a pas de raison de rejeter ni A, ni C, ni D. Comme A' a les même tarifs que A, elle le regroupe sur la même ligne, et sa liste obtenue contient 3 lignes:

	foot	hand	basket	volley	rugby	tennis	ping-pong
A,A'	100	100	100	100	100	100	100
C	110	90	100	110	110	80	80
D	120	80	100	100	110	90	80

Echauffement: trouver des situations[1] où la liste contiendra un nombre aussi grand qu'on veut de lignes (1 million par exemple).

[1] on ne demande pas que les prix soient dans des fourchettes réalistes !

Question 2.1. *Supposons qu'il y ait une infinité de clubs.
Est-il possible que la liste de la fédération soit infinie ?*

Question 2.2. *En prenant des prix entiers* ≤ 200*, quel est le nombre maximal de lignes possible ?*

Bien sûr, on peut moduler la question en changeant le nombre de sports considérés, ou le montant maximal pour la 2ème question. Pour l'estimation du montant maximal, on peut essayer d'en avoir une idée en trouvant des exemples de listes avec beaucoup de lignes (minoration), ou des preuves qu'il ne peut pas y avoir plus de tant de lignes (majoration).

3 Saut à la perche

Soit C un polygone dans le plan. Par exemple un hexagone régulier. Un sauteur à la perche est dans le plan en un point S. Il prend le sommet P du polygone le plus proche[2]. Il y plante sa perche[3], et il saute et se retrouve au point symétrique de son point de départ par rapport à P.

Par exemple, si le sauteur est en $(10, 0)$ sur l'axe horizontal, si le point le plus proche de C est $(1, 0)$, alors il se retrouve en $(-8, 0)$.

Puis le sauteur recommence: il prend le sommet $P' \in C$ le plus proche, et il saute à nouveau.

Cas particuliers: s'il y a 2 points les plus proches P_1, P_2, mais que S n'est pas le milieu de P_1, P_2, il choisit le plus à droite[4]. Si S est le milieu de P_1, P_2 ou s'il y a 3 points equidistants, le sauteur reste sur place.

Le problème consiste à décrire la trajectoire du sauteur.

Question 3.1.

- *Le sauteur va-t-il partir très loin ? ou va-til rester dans une région bornée ?*
- *Va-t-il forcément revenir à sont point de départ ? Va-t-il visiter plusieurs fois le même point ?*
- *Est-ce que ca dépend du point de départ ?*

Possibilité d'étudier plusieurs polygônes, réguliers ou non: triangle, carré, pentagone régulier, hexagone régulier...

Variante: le sauteur saute par dessus le point le plus loin.

4 Racine de -1 dans les nombres infinis en base b 2023-2024

Que se passe-t-il si on regarde des nombres entiers avec un nombre infini de chiffres ? On commence par la base 10, mais on considèrera des bases différentes.

Un nombre entier habituel, par exemple 27, peut s'écrire en base 10 avec une infinite de zéros:

$$\ldots 00000027$$

Si on s'autorise a avoir une infinité de chiffres à gauche, on obtient des sortes de nombres infinis:

$$\ldots 1111111111, \ldots 12121212121, \ldots 98765432109876543210$$

[2] il s'agit d'un sommet du polygone, il pourrait y avoir des points sur un côté du polygone qui soit plus proche.

[3] Il a donc une perche extensible, et n'a pas besoin de course d'élan...

[4] autrement dit, si l'angle SP_1, SP_2 est orienté dans le sens trigo, il choisit P_1

Les operations d'addition se font comme d'habitude (avec la retenue...). Exemples:

$$\ldots 11111111 + \ldots 2222222222 = \ldots 3333333333$$

$$\ldots 11111119 + \ldots 2222222222 = \ldots 3333333341$$

La retenue se traite comme d'habitude.

On peut aussi faire des multiplications

$$\ldots 11111111 \times 0000000002 = \ldots 2222222222222222222222$$

Attention aux surprises:

$$\ldots 999999999999 + \ldots 00000000000001 = \ldots 0000000000$$

donc d'une certaine manière, $\ldots 99999999999999 = -1$.

Si on travaille dans une base $\neq 10$, on peut écrire avec des crochets (ou autre !) pour préciser la base: par exemple, en base 3, $[20221]_3$ représesente $1 + 2 * 3 + 2 * 3^2 + 2 * 3^4 = 1 + 6 + 18 + 162 = 187$. En base 3, on a $[\ldots 222222222]_3 + 1 = 0$, donc $[\ldots 22222222]_3 = -1$.

Problem. *Dans les nombres infinis en base b, quand est-ce que -1 est le carré d'un nombre infini ? Est-ce que ça dépend de la base b ?*

Question reliées:

- Peut-on trouver un algorithme qui nous dit si un nombre fini donné est le carré d'un nombre infini ? (en base 10, ou en base b)? Et qui calcul une racine carrée ?
- Nombre de racines carrées: étant donné $n \in \mathbb{N}$, combien de nombre infinis x en base b vérifient $x^2 = n$? Est-ce que ça dépend de n ? de b ?