Sujets Maths en Jeans 2022-2023

Proposés par Vincent Guirardel

October 4, 2022

1 Clôture de Pacman

Il y a de cela bien longtemps, dans une galaxie lointaine, existait un jeu nommé Pacman. Le personnage Pacman se promenait sur un terrai de forme rectangulaire (avec des obstacles et des fantômes à éviter) avec la particularité suivante: lorsqu'on traversait un côté, on se retrouvait sur le côté opposé.

Disons que le terrain a une largeur $x = L$ et une hauteur $y = l$. Sur le terrain, on veut mettre une clôture, par exemple en forme de croix centrée sur le terrain. Pacman ne peut pas traverser la clôture. Pacman peut aller partout sur le terrain, mais il ne peut pas faire des 'tours non triviaux".

Si on enlevait le segment horizontal de la croix, Pacman pourrait monter verticalement, atteindre le côté haut et donc atterrir en bas, continuer à monter et revenir à son point de départ: ce chemin fait "un tour non trivial". Pour définir ça précisément, remarquons que ce chemin revient à son point de départ, mais le "dénivelé" le long de la coordonnée y est positif (la coordonnees y augmente de $l/2$ sur le premier segment, puis réaugmente de $l/2$ sur le deuxième segment (on ne tient pas compte de la téléportation). De même si on enlevait le segment vertical de la croix, on pourrait faire un chemin qui revient à son point de départ qui irait tout le temps à droite, et cela ferait un "tour non trivial". Plus généralement, on définit un tour non trivial si c'est un chemin formé de segments rectilignes (eventuellements reliés par de la téléportation) tels que la somme des variations de y (ou de x) sur ces segments est non nulle.

Dans ce problème, on veut créer une clôture (qui Pacman ne peut pas traverser) dans ce terrain de Pacman de sorte que

- Pacman puisse aller partout sur le terrain
- mais que Pacman ne peux pas faire de "tour non trivial"
- la clôture soit la plus courte possible.

On pourra se placer sur un terrain carré 1×1 ou un rectangle par exemple de taille $2 \times 1/2$ (de même aire que le carré). On pourra aussi prendre un terrain en forme de parallélogramme (dans ce cas les téléportations se font parallèlement à l'autre côté).

Question. 1. *Trouver une clôture de longueur minimale sur un carré de côté 1, ou un rectangle* $2 \times 1/2$.

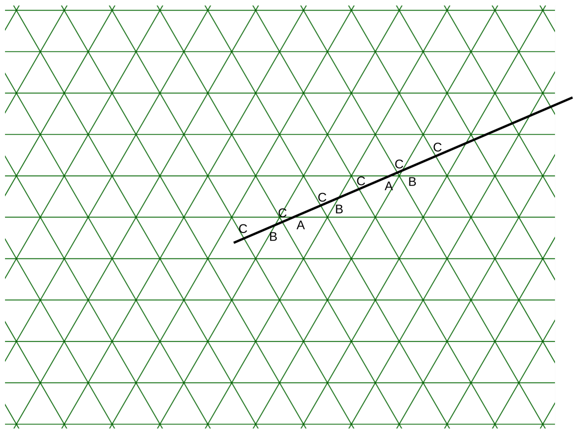
2. *Et sur un rectangle* $l \times L$ *d'aire* 1 *?*

3. *et sur un parallélogramme d'aire 1 ?*

Question. *Quelle est la forme la plus favorable ? Quelle est le rectangle (ou parallélogramme) d'aire 1 qui permet d'avoir la clôture la plus courte ?*

Une façon de donner des réponses partielles à ces questions est de pouvoir dire que la clôture minimale fait au mois a mètres, ou qu'elle fait au plus b mètres, l'objectif étant d'avoir b et a aussi proches que possible.

2 Langage des demi-droites



Dans le plan, on trace un réseau triangulaire comme sur la figure ci-dessus. Il y a 3 types de droites dans ce réseau, les droites de chaque type étant parallèles entre elles. Appelons ces 3 types A,B,C, disons A correspondant à la direction horizontale, et B, C en tournant de 60 puis 120 degres dans le sens trigonométrique.

Maintenant traçons une demi-droite d quelconque, a priori non parallèle aux droites du réseau. On regarde les intersections de cette droite avec le réseau et on note la lettre A,B,ou C selon le type de droites rencontré. Si d passe par un sommet du réseau, on met une lettre spéciale S a la place. On obtient un mot infini sur les 3 lettres A,B,C (et S) associé à la droite d, qu'on note $m(d)$.

Question. *Est-ce que tous les mots finis peuvent apparaître dans les mots associés à une demi-droite ?*

Y a-t-il une infinité de mots infinis $m(d)$ qui peuvent apparaître lorsqu'on fait varier la demi-droite d ?

Est-ce que $m(d)$ peut être un mot périodique ? être un mot ultimement périodique (périodique après un début non périodique) ? A quelles demi-droites cela correspond il ?

Est-ce que plusieurs demi-droites peuvent donner le même nombre infini sans avoir des positions similaires par rapport au pavage ? Si on vous donne le mot infini $m(d)$, pouvez vous reconstruire d ? Quelles informations sur d peut-on tirer à partir d'un sous-mot fini de $m(d)$?

Est-ce que si on efface les lettres C du mot (on ne garde que les A et les B), on peut retrouver le mot initial ?

Est-ce que certains sous-mots n'apparaissent qu'un nombre fini de fois dans $m(d)$, ou au contraire, est-ce que tous les sous-mots finis qui apparaissent dans $m(d)$ se répètent une infinité de fois ?

3 Pile ou face déflationniste.

Dans un casino, on joue au jeu suivant.

Au début l'enjeu est de 100. On lance une pièce. Si elle tombe sur pile, on gagne 100pts, sinon on ne gagne rien. Ensuite on relance la pièce, mais l'enjeu est divisé par 3: $33,33333$ points. Si elle tombe sur pile, on gagne 33,333pts, sinon on ne gagne rien. On recommence autant de fois qu'on veut, mais chaque fois l'enjeu est divisé par 3.

La partie est à 1€. Avant de commencer la partie, on se fixe un objectif (par exemple 150pts), et si on fait plus que l'objectif fixé, on gagne la partie, et le casino nous verse une certaine somme.

Question. *Quelle est la probabilité de gagner pour un objectif de 150€ ou pour un objectif différent ?*

Quel montant le casino doit il verser (en fonction de l'objectif) pour que le jeu soit équitable ?

Combien de temps dure une partie en moyenne si le joueur s'arrete lorsqu'il sait qu'il a gagné (il a dépassé 150) ou qu'il ne peut plus gagner ?

Quelle est l'influence du facteur 1/3 ? Est-ce que les choses sont similaires pour un facteur $1/2$, $2/3$ *ou autre ?*

4 Coloriages de polyèdres

Il y a 5 polyèdres réguliers: le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre. Qu'est-ce que ca signifie réguliers ? Que toutes les faces sont equivalentes: on peut tourner polyedre pour mettre une face a la place de n'importe quelle autre, le polyedre dans la nouvelle position coincide avec sa position initiale. Et de meme pour un dodecaedre par exemple dont les faces sont des pentagones réguliers, si on fait la rotation d'un cinquième de tour par rapport au centre de la face, alors la nouvelle position du polyèdre coincide avec sa position initiale. Il en va de meme pour les sommets.

Voici le problème. On colorie les faces de ces polyèdres en noir et blanc, de toutes les façons possibles.

Question. *Combien y a-t-il de possibilités de coloriage pour chaque polyèdre ? On considère 2 coloriages comme identiques si on peut tourner le polyèdre pour qu'ils coincident.*

Meme question si on utilise 3 couleurs.

5 Sommes d'entiers consecutifs

Question. *Quels sont les nombres qu'on peut ecrire comme somme d'au moins 2 entiers naturels consécutifs ?*

Par exemple, $5 = 2 + 3$ et $18 = 5 + 6 + 7$ peuvent s'écrire comme la somme de deux ou trois entiers consécutifs. Par contre, 2 ne peut pas s'écrire de cette façon.

Dans la 2ème question, on impose aux suites d'entiers de commencer à 1. La question de savoir quels entiers peuvent s'écrire sous la forme $1+2+3+4+5+...+n$ est classique, vous l'avez probablement vue ou allez la voir en cours. Appelons ces nombres des nombres-escaliers

Quels sont les nombres qu'on peut obtenir en additionnant des nombres escaliers ? Par exemple $(1 + 2) + (1 + 2) + (1 + 2 + 3 + 4) = 16$, donc 16 s'écrit comme somme de 3 nombres escaliers (avec une répétition). Comme 1 est un nombre escalier, tous les nombres s'écrivent comme somme de nombres escaliers.

Question. *Est-ce qu'on peut trouver N tel que tout entier soit somme d'au plus N nombres escaliers ?*

Par exemple, est-ce que tout nombre entier est somme d'au plus 100 nombres escaliers ?