Sujets Maths en Jeans 2021-2022

Proposés par Vincent Guirardel

September 25, 2022

1 Pavé noir

Règles du jeu Il s'agit d'un jeu à deux joueurs. Il se joue sur un rectangle formé de $n \times m$ cases. A chaque tour, chaque joueur choisit une case. La case en bas à gauche est spéciale: si un joueur la prend, il perd.

Le premier joueur choisit une case (disons (i, j)), et noircit le rectangle formé de la case choisie et de toutes les cases qui sont au-dessus et à droite de la case choisie (c'est à dire les cases (x, y) telles que $x \geq i$ et $y \geq j$). Les cases noircies ne peuvent plus être jouées.

Le deuxième joueur choisit une case parmi les cases non noircies, et noircit le rectangle au-dessus à droite de la même façon.

Le joueur qui est obligé de prendre la case en bas à gauche à perdu.

Le jeu peut aussi se jouer sur un quart de plan, ou sur un rectangle $n \times \infty$...

Questions

- Étant donné n, m, vaut-il mieux commencer ou jouer en second ? Existe-t-il une stratégie gagnante pour celui qui commence ? Ou est-ce que si le 2ème joueur joue bien, il peut être sûr de gagner ?
- Lorsque n ou m est infini, est-ce qu'il peut arriver qu'il y ait des parties qui durent un temps infini (auquel cas il n'y a ni gagnant ni perdant...) ?

Variantes: Au lieu de partir sur un rectangle, on peut commencer sur un triangle rectangle (les cases (i, j) telles que $i + j \leq n$) et se poser les mêmes questions.

On peut aussi faire une version en 3 dimensions.

Peut-on programmer un ordinateur pour qu'il joue de manière optimale ?

2 Les tapis du dojo

Le dojo est une pièce carrée, de côté un nombre entier de mètres (par exemple $8m \times 8m$). Les tapis de sol font $3m \times 1m$. Il y a un poteau quelque part de $1m \times 1m$, et à distance entière des murs: si on quadrille le dojo en cases de $1m$ de coté, le poteau occupe une de ces cases.

Question 2.1. *Peut-on disposer les tapis de sorte qu'on puisse recouvrir le sol sans qu'ils se chevauchent ?*

Est-ce que ça dépend de la place du poteau ?

Est-ce que ça dépend de la taille de la pièce ?

Que se passe-t-il avec des tapis en forme de L de 3 cases ?

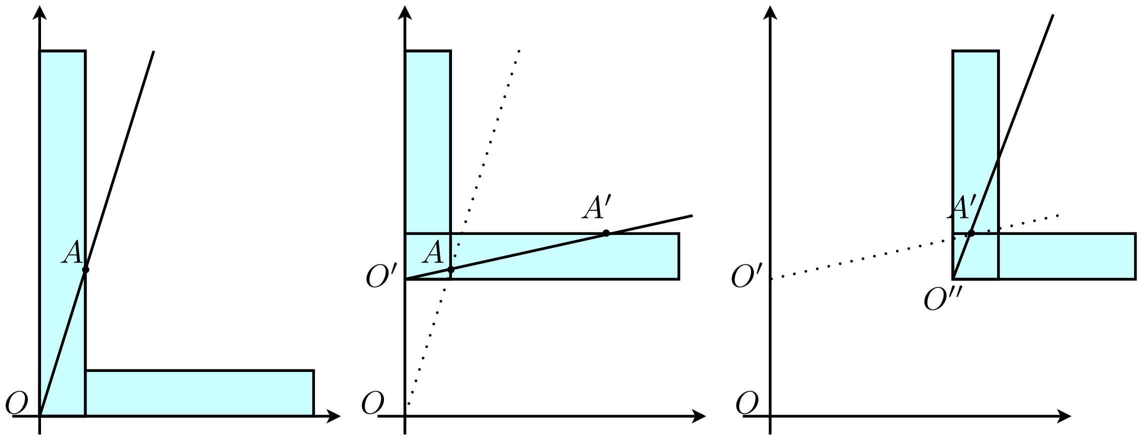
Avec des tapis de 4 cases ?

Et si le dojo est rectangulaire ?

Et si le dojo est triangulaire (mais formé de cases carrées, comme un escalier) ?

3 La droite et l'équerre

L'équerre de base (infinie) est constituées d'une bande verticale infinie de largeur 1, et d'une bande horizontale infinie de hauteur 1: la réunion des bandes $[0,1]\times[0,\infty)$ et $[0,\infty)\times[0,1]$.



On trace une droite d du plan, passant par l'origine O, et dont la pente est ≥ 1. On regarde le point $A=(1,x)$ où la droite sort de l'équerre.

On monte l'équerre d'un nombre entier de cases N_1 de sorte que A soit à l'intérieur de l'équerre. En fait, $N_1=\lfloor x\rfloor$ est la partie entière de x.

On remplace alors notre droite initiale OA par la droite $O'A$ où O' est la nouvelle origine de l'équerre (on peut imaginer que la droite pivote autour de A, et qu'elle est attachée au coin de l'équerre par le point O, et qu'elle suit l'équerre dans son mouvement). La nouvelle droite sort de l'équerre en un nouveau point B. On décale l'équerre à droite de N_2 cases de sorte que B soit a l'intérieur de l'équerre, comme tout a l'heure. La droite pivote de la même façon, et on recommence, sauf si la droite est verticale ou horizontale, auquel cas on s'arrête.

Ceci définit une suite de mouvements de l'équerre, et des nombres $N_1, N_2, N_3, \ldots$...

Pour s'échauffer: prendre la droite $d=OM$ avec $M=(3,4)$, puis $M=(5,13)$ et décrire le mouvement.

Question 3.1. • *Est que l'équerre finit toujours par s'arrêter?*

- *Quelles sont les droites telles que l'équerre va s'arrêter ?*
- *Existe-t-il des mouvements infinis qui donnent toujours le même nombre* $N_1=N_2=N_3$*... ? Des nombres qui se répètent pérodiquement ?*
- *Que se passe-t-il avec la droite qui part à 60 degrés ?*
- *Si on se donne* $N_1, N_2, \ldots, N_k$*, existe-t-il une droite qui va donner ces mouvements-ci de l'équerre ? Est-ce qu'il peut en exister plusieurs ?*

4 Empoche ou passe

Il s'agit d'un jeu de dés à un seul joueur (disons dans un casino). On fixe un nombre de coups maximum, disons $N=5$ coups. A chaque coup, le joueur lance un dé et décide s'il empoche le montant indiqué par le dé, ou s'il préfère continuer a lancer le dé (pour espérer gagner plus).

Exemples:

- 1er lancer: 1. Je choisis de relancer.

- 2e lancer: 6. Je choisis d'empocher. Je gagne 6 euros, la partie s'arrete.

Autre exemple

- 1er lancer: 2. Je choisis de relancer
- 2e lancer: 4. Je choisis de relancer
- 3e lancer: 3. Je choisis de relancer.
- 4e lancer: 1. Je choisis de relancer.
- 5e lancer: 2. Je n'ai plus la possibilité de relancer, j'empoche 2.

Questions

Question 4.1. *1. Point de vue du joueur: Trouver une stratégie qui permet, en moyenne de gagner le plus possible.*

2. Point de vue du Casino: Combien faut-t-il faire payer l'accès au jeu (un montant fixe par partie) pour ne pas perdre d'argent ?

3. Pour $N = 5$, mais aussi pour d' autres valeurs de N...

4. Et si on lance un dé à 20 faces ?

Question 4.2. *Variante du jeu: avant chaque lancer, on paye un montant fixe p, par exemple $p = 1$ €.*

- *Trouver une stratégie optimale (qui dépend probablement aussi de p).*
- *(point de vue du casino). Il n'y a pas de prix d'entree, mais a combien fixer p pour que le casino ne perde pas d'argent ?*

5 Arrosage irrationnel

Un jet d'eau arrose le plan de façon particulière: si on le place en un point A, les gouttes ne tombent que sur les points à distance irrationnelle de A (et tombent sur tous ces points).

Question: peut on placer un nombre fini de jets d'eau dans le plan pour que tout le plan soit arrosé ?

Même question avec la marque concurrente dont les gouttes ne tombent que sur des points à distance rationnelles du jet d'eau.

Variantes: on peut se poser les mêmes questions en 1 ou 3 dimensions.