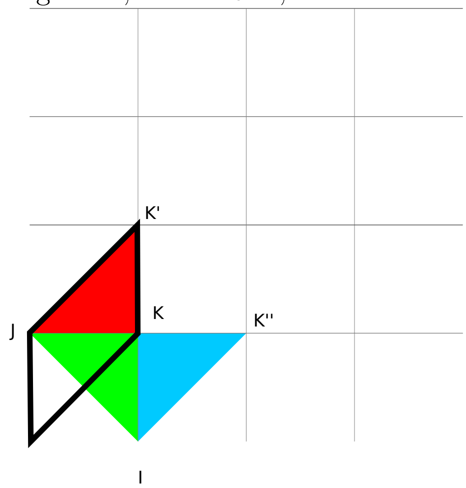
Sujets Maths en Jeans 2020-2021

Proposés par Vincent Guirardel

September 29, 2020

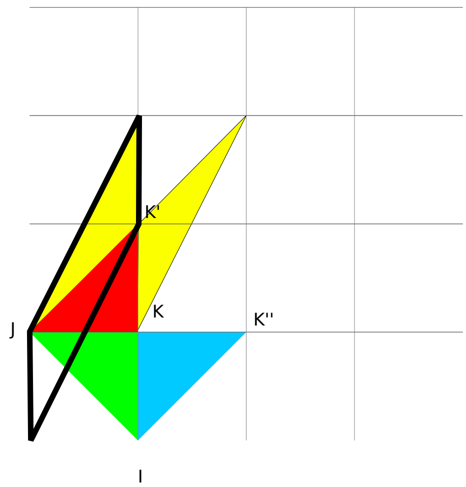
1 Le labyrinthe des nombres

Le plan du labyrinthe est construit ainsi. Toutes les pièces sont triangulaires. La première pièce est le triangle rectangle vert IJK. L'origine est $O = (0, 0)$. IJ est le segment "de base", par lequel on entre dans le labyrinthe. On imagine donc une porte dans le côté IJ, et quand on entre, on voit à gauche, le côté JK, et à droite le côté KI.



On va construire deux nouvelles pièces du labyrinthe, une du côté gauche (rouge), une du côté droit (bleue). La pièce du côté gauche sera un triangle JKK', mais pas n'importe lequel: K' est le point tel que les 4 points $JK'KO$ forment un parallélogramme. En fait K' a pour coordonnées $(1, 2)$. Cette nouvelle pièce JKK' a une entrée par le segment JK, et 2 sorties: une a gauche par le segment JK', une a droite par le segment $K'K$.

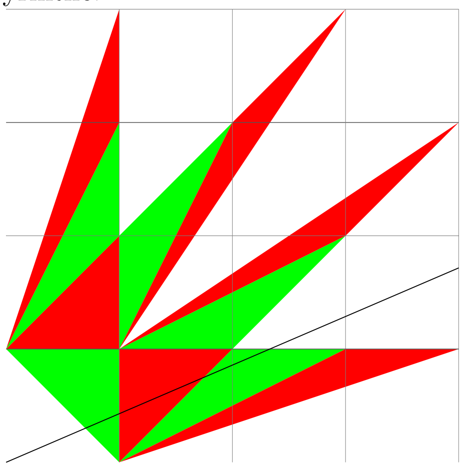
On peut de la meme facon construire une autre pièce triangulaire sur le côté droit de notre triangle IJK initial: c'est le triangle IKK'' tel que $OIK''K$ soit un parallélogramme. Lui aussi a une entrée (le segment IK), et 2 sorties: à gauche le segment KK'' et a droite le segment $K''I$.



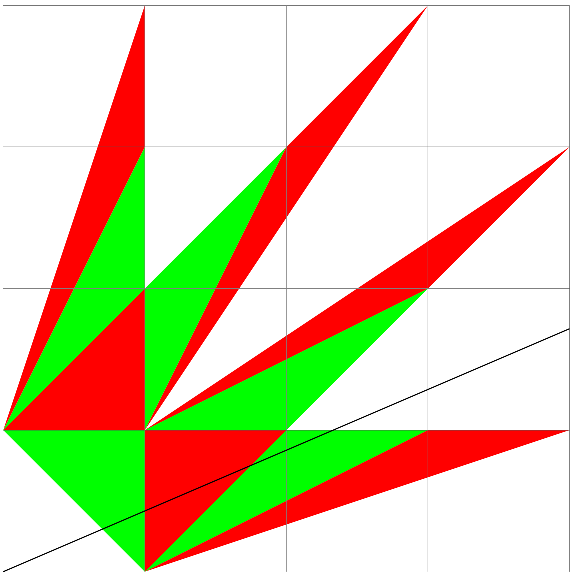
Maintenant, sur chacune de ces 2 pièces, on construit 2 nouvelles pièces adjacentes (donc 4 en tout), en suivant la meme regle: la pièce adjacente au côté JK' est un triangle $JK'L$ tel que $OJLK'$ soit un parallelogramme, etc. Son entrée est le segment JK', ses 2 sorties sont les segments $K'L$ et JL.

On peut recommencer cette construction à l'infini, et on obtient un labyrinthe infini. Chaque triangle a une entrée, et 2 sorties: gauche ou droite.

Voici une partie du labyrinthe:

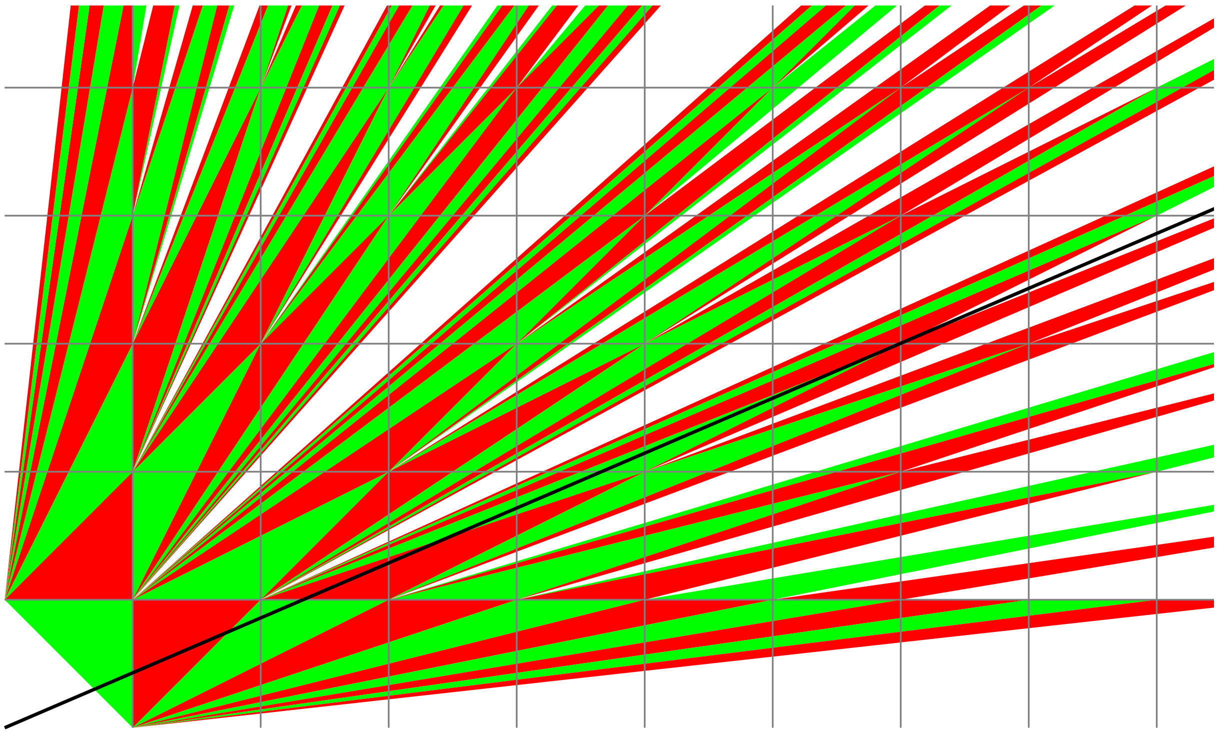


L'itinéraire d'un nombre Maintenant, on va associer un itinéraire a chaque nombre. J'ai pris le nombre $3/7 \simeq 0.428...$, et j'ai tracé la droite de pente $3/7$ passant par l'origine sur le labyrinthe.



Cette droite definit un itineraire dans le labyrinthe: elle entre dans le labyrinthe par l'entrée du premier triangle, elle sort de cette première pièce par sa sortie droite, puis elle continue sur la sortie droite de la pièce suivante, puis sort par la sortie gauche de celle d'après.

Si on continue à regarder, on voit que l'itinéraire complet prend 2 fois à droite, puis 2 fois a gauche, puis s'arrête. On s'arrête parce que la droite tombe pile sur le sommet du dernier triangle, donc on peut pas dire si elle sort à droite ou à gauche. On pourrait coder l'itinéraire par la suite de lettres $DDGGS$, ou $2D, 2G, S$, qui signifie: 2 fois à droite, 2 fois à gauche, puis stop.



De la même façon, on peut à chaque nombre associer un itinéraire, (fini si on finit par arriver un sommet d'un triangle, ou infini sinon...).

Questions:

- quels sont les nombres qu'on peut obtenir comme point d'arrivee d'un codage fini (qui finissent par un stop) ?
- Infini, mais périodique ?
- Quel est le codage de $\sqrt{2}$?
- Que devient un nombre si on on lui rajoute un G ? un D? si on lui enleve tous ses premiers G ? Si on remplace G par D et D par G ?

Pour se chauffer: Quelles sont les coordonnées des sommets des triangles ? Quel est le codage de 13/8 ? Quels sont les nombres dont l'adresse n'a que de G, que des D ?

Autres questions possibles: Programmer le calcul de l'itineraire d'un nombre.

Est-ce que 2 nombres peuvent avoir le meme codage ?

Du codage au nombre: Est-ce que tout codage finissant par un stop correspond a un nombre ? lequel ? Est-ce qu'il y a un nombre qui correspond au codage GDGDGDGDGDGDGDG... ? Lequel ? Est-ce que tout codage infini correspond a un nombre ?

2 Empoche ou passe

Il s'agit d'un jeu de dés à un seul joueur (disons dans un casino). On fixe un nombre de coups maximum, disons $N = 5$ coups. A chaque coup, le joueur lance un dé et décide s'il empoche le montant indiqué par le dé, ou s'il préfère continuer a lancer le dé (pour espérer gagner plus).

Exemples:

- 1er lancer: 1. Je choisis de relancer.
- 2e lancer: 6. Je choisis d'empocher. Je gagne 6 euros, la partie s'arrete.

Autre exemple

- 1er lancer: 2. Je choisis de relancer
- 2e lancer: 4. Je choisis de relancer
- 3e lancer: 3. Je choisis de relancer.
- 4e lancer: 1. Je choiss de relancer.
- 5e lancer: 2. Je n'ai plus la possibilité de relancer, j'empoche 2.

Questions

Question 2.1.
1. *Point de vue du joueur: Trouver une stratégie qui permet, en moyenne de gagner le plus possible.*
2. *Point de vue du Casino: Combien faut-t-il faire payer l'accès au jeu (un montant fixe par partie) pour ne pas perdre d'argent ?*
3. *Pour $N = 5$, mais aussi pour d' autres valeurs de N...*
4. *Et si on lance un dé à 20 faces ?*

Question 2.2. *Variante du jeu: avant chaque lancer, on paye un montant fixe p, par exemple $p = 1$ €.*

- *Trouver une stratégie optimale (qui dépend probablement aussi de p).*
- *(point de vue du casino). Il n'y a pas de prix d'entree, mais a combien fixer p pour que le casino ne perde pas d'argent ?*

3 Particule téléportée

Deux balises de téléportation A et B sont sur une droite.

Une particule se trouve en un point x sur la droite. Si x est dans la zone d'influence de A, la particule se retrouve a l'instant suivant 3 fois plus loin de A, du même côté. Si x est dans la zone d'influence de B, la particule se retrouve a l'instant suivant 3 fois plus loin de B, mais du côté opposé.

Le point qui sépare les zones d'influence de A et B est le point qui se retrouverait au même endroit s'il était téléporté par la balise A ou B.

Question 3.1.
1. *Si la particule part du point A ou B, elle ne bouge pas. Peut-elle sauter 10 fois puis ne plus bouger ? Combien de points de départs possibles pour que ça arrive ? (meme question en remplacant 10 par 1,2,3,4...)*
2. *Peut-elle revenir à son point de départ en 2 coups ? 3 coups ? 4 coups ? n-coups ?*
3. *Est-ce que la particule peut s'échapper vers l'infini ?*
4. *Peut-elle rester confinée dans une région finie sans jamais revenir sur ses pas ?*

Autres question et variantes: Est-ce que la réponse à ces questions dépend de la position de A et B ?

Et si on remplace 3 un autre nombre ? 4, 2, 1/2,...

4 Dames au carré

On met n^2 pions en carré sur un quadrillage On déplace un pion horizontalement ou verticalement de 2 cases en sautant un pion, le pion sauté est alors retiré du quadrillage.

Question 4.1. *Pour quelles valeur de n est il possible de finir avec un seul pion, et pour quelles valeurs de n cela est-il impossible ?*

Meme question sur une droite plutot que le plan

Meme question avec un rectangle, ou d'autres formes (losange...)

Est-ce que pour toutes valeurs de n, on peut placer n pions sur le plan de facon "connexe"[1] *et de sorte qu'il y ait une stratégie qui permette de finir avec un seul pion ?*

5 Propagation de virus

Les habitants du *plat pays* vivent aux sommets d'un quadrillage infini du plan (il y a un habitant en chaque sommet, la population est infinie...).

Un beau (?) jour, un habitant contracte un virus et tombe malade. Le jour d'après, il est guéri et immunisé (donc ne peut plus etre malade), mais chacun de ses 4 voisins a une probabilité p (par exemple $p = 1/5$) d'avoir attrapé le virus. On peut imaginer qu'elle lance une pièce à 2 faces (contagion, pas-contagion), la face "contagion" ayant une probabilité p de tomber; ou alors qu'elle lance un dé à 5 faces, l'une des faces étant étiquetée "contagion"... Le jour d'après ça continue de la meme façon: toute personne contaminée est guérie le jour d'après, et immunisée (donc ne peut plus etre malade). Pour la contagion, il peut y a voir des situations plus compliquées si une personne a plusieurs voisins malades. Dans ce cas, la personne lance une pièce (ou un dé à 5 faces...)pour chaque voisin malade. Si une des pièces indique "contagion", elle sera malade au prochain tour, sinon, elle sera saine.

Question 5.1. *Quelle est la probabilité que l'épidémie dure un temps infini (pour $p = 1/5$, ou pour d'autres valeurs de p)?*

Par exemple, elle pourrait s'arreter le 1er jour si aucun des voisins n'est contaminé, ou le 2e jour si aucun des voisins des malades du 2e jour n'est contaminé...

Question 5.2. *On regarde une personne a distance 4 du patient 0. Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée en 4 jours ? en n jours ? Qu'elle soit infectée un jour ?*

Question 5.3. *Et que se passe-t-il si les personnes malades ne sont pas immunisées: elles guerissent le lendemain mais peuvent etre recontaminees (ca peut arriver pile le jour ou elle guerissent auquel cas elles restent malades...)*

[1] on peut aller de n'importe quel pion a n'importe quel autre en se promenant verticalement et horizontalement, en restant tout le temps sur les pions